LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

L'ABSORPTION ATMOSPHÉRIQUE D'APRÈS LES MESURES DE LA « SMITHSONIAN INSTITUTION »

Par JACQUES DUCLAUX.

Sommaire. — Les mesures de la constante solaire faites au Mont Wilson et à Montezuma ont été souvent utilisées pour la détermination de l'absorption atmosphérique. Les méthodes employées ont conduit à des erreurs. Un traitement correct des chiffres conduit aux conclusions suivantes : 1° l'hypothèse d'une absorption de Rayleigh, superposée à une absorption indépendante de la longueur d'onde est inadmissible; 2° il n'y a pas d'absorption neutre; celle qui se superpose à la diffusion moléculaire varie grossièrement suivant une puissance de la longueur d'onde comprise entre 1,1 et 1,5 et variable d'un jour à l'autre; 3° le coefficient théorique de la diffusion moléculaire doit être diminué d'au moins 25 pour 100; 4° l'expérience à elle seule ne donne aucun appui à l'hypothèse d'une absorption minima infranchissable et tout se passe seulement comme si chaque chiffre d'absorption était d'autant moins probable qu'il est plus faible; 5° malgré les autres causes d'absorption, la transparence théorique est souvent dépassée dans l'ultraviolet; 6° il est illusoire de vouloir tirer des chiffres une valeur du nombre N d'Avogadro.

1. Les mesures faites par les physiciens de la *Smithsonian Institution*, en vue de la détermination de la constante solaire, principalement au Mont Wilson et à Montezuma (*Annals of the Astronomical Observatory of the Smithsonian Institution*, t. 2 à 5; en abrégé dans ce qui suit *Annals*) ont été souvent utilisées pour le calcul des coefficients d'absorption de l'atmosphère. Les conclusions de ces études ont toujours été les mêmes : l'absorption est la somme de deux termes dont l'un correspond à la diffusion moléculaire, quantitativement représentée par la formule de Rayleigh-Cabannes, et l'autre à une absorption neutre, c'est-à-dire indépendante de la longueur d'onde (brume blanche). Il est, par suite, très généralement admis aujourd'hui que l'absorption de l'atmosphère ne peut pas descendre au-dessous d'un certain minimum donné par la formule théorique.

Il peut sembler surprenant qu'il y ait encore quelque chose à dire sur une question qui paraît jugée. Mais l'examen des méthodes suivies montre qu'elles sont trop défectueuses pour mériter confiance. Les auteurs se sont mis au travail avec le désir de vérifier une théorie et ils ont fait ce qu'il fallait pour cela, allant parfois jusqu'à supprimer les observations qui ne leur plaisaient pas. J'ai donc repris l'étude de cette question. Le résultat montre que l'opinion universelle définie plus haut est incompatible avec les faits. La question de la transparence atmosphérique doit être entièrement reprise.

2. Pour abréger je désignerai dans ce qui suit par *atmosphère de Rayleigh* une atmosphère fictive dont les coefficients d'absorption seraient représentés par la formule de Rayleigh-Cabannes; par *coefficients de Rayleigh* ceux que donne le calcul. En général tous les chiffres théoriques seront signalés par la lettre R. Ainsi, la théorie conduit à admettre que les coefficients d'absorption varient suivant une puissance ($-n$) de la longueur d'onde, n étant un nombre compris entre 4 et 4,2 pour le spectre visible. Nous dirons qu'ils varient comme λ^{-R}.

3. Les mesures de la *Smithsonian Institution* ont toutes été faites avec des appareils du même type. Dans ce qui suit, il ne sera pas fait d'autre choix entre les mesures que celui que les auteurs ont fait *eux-mêmes*. Ils les ont affectées de notes : *excellent*, *très bon*, *bon* et *médiocre*. J'ai laissé en général les

médiocres de côté; elles sont peu nombreuses, affectées d'erreurs bien plus grandes et ne peuvent que diminuer la précision des résultats. Le choix des auteurs a été fait d'après des documents qui ne nous ont pas été transmis; on peut d'autant plus avoir confiance en eux que l'on constate effectivement, comme nous le verrons, une différence de précision et de qualité entre les diverses classes.

Pour lever tous les doutes j'ai quelquefois traité à part les chiffres : *excellents, très bons* et *médiocres* pour montrer que les résultats donnés par ces trois catégories étaient parallèles.

4. **Choix des longueurs d'onde.** — Les mémoires des *Annals* donnent les valeurs journalières de la transparence pour un assez grand nombre de longueurs d'onde; par exemple celles de Montezuma sont relatives à 349, 395, 450, 499, 621, 714, 803, 977, 1214, 1593 mμ. Toutes ces longueurs d'onde n'ont pas le même intérêt pour la recherche d'une loi d'absorption. Entre 0,35 et 0,7 μ l'absorption est rapidement décroissante; au-dessus de 0,9 μ la variation est faible et même de sens incertain. Il suffit, pour s'en rendre compte, de regarder la Planche XVII (p. 109 du tome II des *Annals*) relative au Mont Wilson. Au-dessus de 0,9 μ environ la transmission cesse de s'approcher de l'unité et elle s'en éloigne même au-dessus de 1,5 μ. Il en est de même à Montezuma, quoique à un degré un peu moindre. Si l'on représente par un terme en λ^{-n} la variation du coefficient d'absorption entre deux longueurs d'onde consécutives, la moyenne des 153 journées *excellentes* conduit aux valeurs suivantes de n :

349	395	450	499	714	803	977	1214	1593
3,81	3,73	2,69	3,20	3,23	1,99	0,48	—0,16	

Il y a un changement rapide autour de 0,8 μ. Pour dégager le terme de Rayleigh, qui correspond à une puissance voisine de 4, les longueurs d'onde supérieures à 0,8 μ sont évidemment sans valeur, la diffusion moléculaire étant noyée dans une absorption d'une autre nature beaucoup plus forte. J'ai donc laissé de côté les radiations de longueur d'onde supérieures à 0,8 μ.

J'ai également laissé de côté les radiations voisines de 0,60-0,63 qui sont au milieu de la bande d'absorption de l'ozone, la correction due à la présence de l'ozone étant forte et incertaine dans cette région.

I. — Recherche d'une loi purement expérimentale d'absorption.

5. Prenons les 103 mesures faites au Mont Wilson en 1915. Les *Annals* donnent les valeurs de la transparence T; il est préférable de faire intervenir dans les calculs les valeurs de $(\log T)$ qui sont le résultat direct de l'expérience. Les moyennes des 103 valeurs de $(\log T)$ pour les cinq longueurs d'onde conservées sont :

0,35	0,40	0,45	0,50	0,70
$\bar{1}$,7670	$\bar{1}$,8617	$\bar{1}$,9095	$\bar{1}$,9358	$\bar{1}$,9767

Nous pouvons essayer de représenter la variation en fonction de la longueur d'onde par une formule du type

$$\log T = A - B\lambda^{-1} - C\lambda^{-2} - D\lambda^{-3} - E\lambda^{-4}. \quad (1)$$

Si le phénomène essentiel dans cette région du spectre correspond à une loi en λ^{-4}, nous pouvons espérer que dans l'expression (1) le terme en λ^{-4} sera prépondérant, les autres n'intervenant qu'au titre de corrections. Nous aurons ainsi une loi purement expérimentale. Ce mode de calcul admet que les densités optiques correspondant aux divers modes d'absorption s'ajoutent, mais cette hypothèse a toujours été faite et on ne voit pas le moyen d'y échapper.

Tableau I.

Valeurs des coefficients A, B, C, D, E de la formule (1) au Mont Wilson.

	A.	B.	C.	D.	E.
1915	1,1904	+0,3280	—0,1850	+0,0414	+0,00047
1916-1918. Excellent	1,1508	+0,2786	—0,1677	+0,0439	—0,00100
» Très bon	1,0267	+0,0351	+0,0078	—0,0107	+0,00521
» Bon et médiocre	0,9225	—0,1682	+0,1566	—0,0567	+0,01032
1919-1920	1,0182	+0,0848	—0,0897	+0,0457	—0,00528

En plus le coefficient A devra évidemment être inférieur à l'unité. Les résultats du calcul pour diverses séries de mesures au Mont Wilson sont donnés au Tableau I.

Le Tableau I est très décevant. D'une série à l'autre, bien qu'il s'agisse de moyennes, les variations des coefficients sont très grandes; ils sont même alternativement positifs et négatifs. Considérons en

·ticulier le terme en λ^{-4} qui devrait être prépon-
·ant, puisque dans cette région du spectre la
·iation de l'absorption se fait suivant une puis-
ıce de λ comprise entre 3,81 et 3,20; non seulement
n'est pas prépondérant, mais deux fois sur cinq
est négatif. En plus A est quatre fois sur cinq
›érieur à l'unité. Cette anomalie n'est pas due
l'imprécision des mesures, car elle apparaît
tement pour les meilleures mesures. La seule
ie qui donne des chiffres raisonnables est la
ıs mauvaise de toutes.

D'après cela on peut dire que les mesures du
ont Wilson ne conduisent *par elles-mêmes* à
cune loi d'absorption. Ceci n'est vrai en toute
ueur que pour les lois représentées par une
mule du type (1). Mais ce type n'est pas arbi-
ire; le terme en λ^{-4} avec un coefficient constant
commandé par la théorie, et de plus, on a
ıjours admis l'existence d'un terme en λ^0; ceux
λ^{-1}, λ^{-2} et λ^{-3} devant être nuls. Aucune de ces
visions n'est vérifiée.

Dans la formule (1) la longueur d'onde intervient
a puissance 4. J'ai vérifié que les résultats restent
mêmes avec un terme en λ^{-R}, R étant la quantité
inie plus haut [2] par la formule de Rayleigh.
coefficients sont tous modifiés dans les mêmes
›portions, et ceux qui étaient négatifs restent
gatifs.

On peut ramener les coefficients E à leurs valeurs
éoriques en admettant qu'une partie de l'absorption
t due à l'ozone. Les épaisseurs d'ozone calculées
nt pour les diverses années, en centimètres :

$$+0{,}0126, \quad +0{,}041, \quad +0{,}019, \quad -0{,}0300, \quad -0{,}0079.$$

Deux de ces valeurs sont négatives : l'ozone
est donc pas la cause des anomalies que nous
nstatons.

Ces anomalies ne sont pas spéciales au Mont
ilson. Les calculs ont été faits pour les 153 obser-
ıtions *excellentes* de Montezuma qui sont les
eilleures de toutes. Le terme en λ^{-4} a été remplacé
ır le terme correct en λ^{-R}. J'ai obtenu

$$A = 2{,}3657, \qquad B = +2{,}4884, \qquad C = -1{,}5960,$$
$$D = +0{,}4204, \qquad E = -0{,}2925.$$

Ces résultats sont les plus mauvais de tous.
terme en λ^{-R} est négatif et particulièrement
and, tandis que le terme constant a une valeur
›surde. En admettant une certaine quantité
ozone, on arrive bien à donner au terme en E
valeur voulue, mais alors le terme constant
ıgmente encore.

Un premier point établi est ainsi que *les mesures
conduisent par elles-mêmes à aucune loi raison-
ıble d'absorption*. Elles pourront être *compatibles*
ec une loi : elles ne la rendront pas *nécessaire*.

II. — Comparaison avec la formule de Rayleigh.

6. Nous avons maintenant à examiner si les coefficients d'absorption expérimentaux, tout en ne conduisant par eux-mêmes à aucune loi, sont compatibles avec celle de Rayleigh.

Les mémoires des *Annals* ne donnent pas la pression barométrique aux jours d'observation. Mais dans d'autres travaux du Mont Wilson on lit des nombres compris entre 620 et 625, et ce sont ces chiffres qui ont jusqu'ici servi aux calculs; la différence entre les deux est insignifiante. Pour Montezuma l'incertitude est plus grande mais nous verrons qu'elle n'influe pas sur les résultats.

7. **Absorption neutre.** — L'opinion courante est que l'absorption totale est la somme de la diffusion moléculaire théorique et d'une absorption neutre, ou indépendante de la longueur d'onde.

Dans ces conditions le logarithme de la transparence T est la somme d'un terme constant et du terme de diffusion en λ^{-R}. On aura donc pour deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2

$$\log T_1 = a - b\lambda_1^{-R}, \qquad \log T_2 = a - b\lambda_2^{-R},$$
$$\log T_1 - \log T_2 = b(\lambda_2^{-R} - \lambda_1^{-R})$$

et la différence entre $\log T_1$ et $\log T_2$ sera la même que s'il n'y avait pas d'absorption neutre. La vérification est facile. Le Tableau II donne les résultats (moyennes) du Mont Wilson avec les chiffres calculés pour une pression de 620 mm.

Tableau II.

Différences ($\times 10^4$) *entre les* $\log T$ *pour deux longueurs d'onde consécutives* (Mont Wilson).

	0,35 à 0,40.	0,40 à 0,45.	0,45 à 0,50.	0,50 à 0,70.
Théorie	959	496	279	377
1910	673	463	285	374
1911	718	442	280	388
1915	939	478	263	409
1919-1920	647	408	262	424
1905-1906 Excellent	–	394	219	408
1916-1918 Excellent	875	472	269	423
» Très bon	888	467	270	426
» Bon et médiocre	874	463	274	444

Pour les deux premières colonnes les valeurs expérimentales des différences sont *systématiquemen* inférieures aux valeurs théoriques. Pour la dernière elles sont *systématiquement* plus grandes. Dans tous les cas les écarts sont bien plus grands que

les erreurs possibles. Il est donc impossible de concilier l'expérience avec la théorie. Le désaccord ne provient pas de la présence de l'ozone, car chaque centimètre d'ozone diminue de 40 les chiffres de la première colonne qui sont déjà trop petits.

Les longueurs d'onde peuvent n'être pas très exactes. Mais pour expliquer les chiffres trouvés, il faudrait admettre des erreurs invraisemblables, allant jusqu'à trois fois la distance des raies H et K qui sont sur les enregistrements distantes de 5 mm.

Les calculs ont été faits pour une pression barométrique de 620 mm, la plus faible que l'on trouve dans la littérature du Mont Wilson. Une pression supérieure augmente encore l'écart pour les deux premières colonnes.

Enfin on pourrait invoquer l'existence d'erreurs systématiques, se produisant irrégulièrement pour certaines longueurs d'onde. Je ne discuterai pas cette question qui est sans intérêt. Je dis que les chiffres tels qu'ils ont été publiés sont incompatibles avec les hypothèses faites jusqu'ici, et pas autre chose. S'ils sont inexacts, ils ne prouvent rien *contre* ces hypothèses, mais aussi ils ne prouvent rien *pour*, et tout ce qui a été dit à leur sujet continue à être sans valeur.

Nous pouvons cependant rappeler, pour en établir le peu d'importance, une cause d'erreur qui a déjà été signalée. On a dit, sous l'influence de préoccupations de théorie, que la transparence trouvée dans l'ultraviolet est trop forte en raison de la lumière de plus grande longueur d'onde diffusée dans l'appareil, en quantité variable d'une année à l'autre. La correction de cette erreur de diffusion rapproche les chiffres expérimentaux de la théorie. Cette diffusion existe certainement, mais ne peut expliquer les différences. L'appareil du Mont Wilson est un spectrographe à optique de quartz. Le maximum d'énergie du spectre solaire est dans le vert; c'est aussi la couleur à laquelle l'œil est le plus sensible, alors qu'il l'est très peu au violet. Si donc la lumière diffusée était assez forte pour impressionner le bolomètre, elle serait *a fortiori* assez forte pour impressionner l'œil, et dans un spectrographe l'extrémité violette du spectre devrait avoir une coloration verte. Or on ne constate rien de pareil, même en regardant une source artificielle de lumière dans laquelle la proportion des rayons violets aux verts est bien moindre que dans la lumière solaire. Nous n'avons aucune raison de croire que pendant dix ans le spectrographe du Mont Wilson soit resté, au point de vue de la diffusion, très inférieur aux autres spectrographes.

Enfin s'il y a diffusion du côté du violet, il y en a aussi du côté du rouge, et il n'y a alors de nombres méritant confiance que dans le milieu du spectre; s'il en était ainsi il faudrait renoncer à tirer quelque chose des mesures.

La même méthode a été appliquée à la station de Montezuma. Les différences sont données au Tableau III.

TABLEAU III.

Différences entre les log *T à Montezuma.*

	349-395.	395-450.	450-499.	499-714.	714-803.
Excellent	758	485	188	401	59
Très bon	760	495	211	404	60
Théorie. $P = 540$	801	491	239	347	40
» 550	815	500	243	353	41
» 560	830	509	247	360	41

Les *Annals* ne donnent pas la pression barométrique, mais elle ne peut pas s'écarter beaucoup de 550; j'ai fait les calculs pour 540, 550 et 560. Il y a 153 observations *excellentes* et 256 *très bonnes*. Les chiffres de la première colonne sont encore trop petits et l'ozone les diminue encore. Ceux des colonnes 3, 4 et 5 diffèrent encore systématiquement des nombres théoriques, quelle que soit la pression.

J'ai encore traité les mesures du Mont Brukkaros (*Annals*, t. IV) qui donnent le Tableau IV. La même difficulté se présentant pour la pression, j'ai fait les calculs pour 625, 635 et 645 mm, le chiffre moyen étant normal pour une altitude de 1586 m. Comme au Mont Wilson, les chiffres des deux colonnes sont systématiquement inférieurs aux chiffres théoriques, quelle que soit la pression.

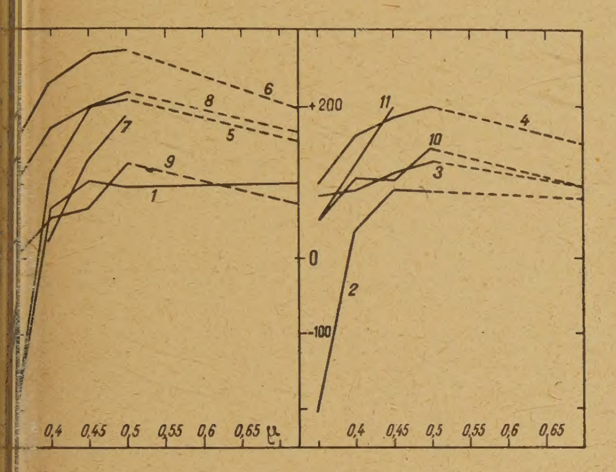
Aussi bien à Brukkaros qu'à Montezuma et au Mont Wilson, l'hypothèse d'une absorption neutre superposée à une absorption de Rayleigh est contraire aux faits.

TABLEAU IV.

Différences entre les log *T à Brukkaros.*

	348-391.	391-446.
1927	878	527
1928	761	527
1929	874	528
1930	796	547
Moyenne	836	532
Théorie. $P = 625$	894	597
» 635	908	608
» 645	923	618

. Essai d'une absorption superposée sélec-e. — Renonçant à une absorption neutre, nous vons chercher à expliquer les faits par une orption de Rayleigh superposée à une autre orption quelconque à laquelle nous demanderons lement de suivre une loi raisonnable de variation fonction de la longueur d'onde Il suffit de rancher, pour chaque série calculée, les nombres Rayleigh des nombres expérimentaux. Le résultat donné par la figure 1. On voit que la densité



. 1. — Densités optiques (× 10^4) des atmosphères oyennes, diminuées des densités de Rayleigh. Courbes 1, , 3 : Mont Wilson 1910, 1911, 1915. Courbes 4, 5, 6 : Iont Wilson 1916-1918 « Excellent », « très bon », « bon et iédiocre ». Courbes 7, 8 : Mont Wilson 1905-1906 t 1919-1920. Courbes 9, 10 : Montezuma « excellent » t « très bon ». Courbe 11 : Brukkaros. La partie pointillée les courbes est très incertaine à cause de l'ozone; mais le aximum vers 0,5 μ est général. Une absorption neutre levrait donner des droites horizontales.

tique de cette brume hypothétique devrait passer r un maximum entre 0,45 et 0,50 μ et devenir gative vers 0,35 μ. On ne voit pas le moyen de tir de ces figures une loi d'absorption raisonnable, utant plus que les variations d'une série à l'autre it très considérables. L'ozone donnerait un maxi-im au-dessus de 0,6 μ, très éloigné de celui que us trouvons.

Nous devons donc renoncer tout à fait aux chiffres Rayleigh; comme je l'ai déjà fait remarquer [1], ne peuvent pas servir de guide dans l'étude de tmosphère réelle, au point de vue quantitatif.

I. — Interprétation des chiffres d'absorption.

). Jusqu'ici les résultats ont été entièrement gatifs et nous devons chercher à tirer parti trement du matériel considérable et de grande leur fourni par la *Smithsonian Institution*.

Les nombres trouvés pour chacune des radiations étudiées sont très variables d'un jour à l'autre. Ainsi pour les observations *excellentes* de Montezuma, qui sont celles dont les écarts sont les plus faibles, les chiffres relatifs à la longueur d'onde 0,395 varient entre $\bar{1}$,8555 et $\bar{1}$,8909, c'est-à-dire que la densité optique varie de 0,1445 à 0,1091.

Une discussion que j'omets montre que les différences d'un jour à l'autre sont réelles et ne sont pas dues à des erreurs de mesure. Ce n'est pas *une* atmosphère que nous avons en chaque station, c'est un nombre *illimité* d'atmosphères différentes. En raison du grand nombre d'observations nous allons pouvoir tirer parti de ces différences sans avoir recours à aucune théorie.

Faisons pour une suite de journées les moyennes des transparences pour les diverses radiations. Si les écarts des chiffres individuels avec leurs moyennes étaient dus à des erreurs de mesure, les chiffres d'une même journée pour les diverses radiations seraient indifféremment plus grands ou plus petits que leurs moyennes, suivant les lois du hasard.

Si au contraire c'est réellement l'atmosphère qui change d'un jour à l'autre, il est probable qu'à une grande transparence dans le violet correspondra aussi une grande transparence pour les autres couleurs. Or c'est ce dernier résultat que donne l'expérience. A Montezuma sur 153 journées *excellentes* il y en a 76 qui donnent, pour la transparence à 0,35 μ, un chiffre supérieur à la moyenne 1,7982. Sur ces 76 journées

55 donnent aussi une transparence en excès pour 0,385,
57 » » 0,450,
49 » » 0,499,
60 » » 0,714,
58 » » 0,803,

alors que dans l'hypothèses de l'indépendance des mesures il y en aurait dans chaque cas seulement 38. De plus, le nombre de journées pendant lesquelles les six chiffres de transparence ont été *simultanément* supérieurs à la moyenne est 36, alors que la loi du hasard donnerait 2,4. Pour les 256 journées *très bonnes* les chiffres correspondants sont 66 et 4. Les observations du Mont Wilson et de Brukkaros donnent des résultats équivalents.

La probabilité pour que les journées ainsi définies aient été réellement des journées de plus grande transparence est tellement grande qu'elle équivaut à une certitude. Prenons une moyenne nouvelle pour les 36 journées *excellentes* de meilleure transparence pour les six radiations simultanément; cette moyenne caractérisera les journées les plus claires. Les chiffres sont, toujours pour les (log T) :

Série maximum

$\bar{1}$,8073, $\bar{1}$,8790, $\bar{1}$,9268, $\bar{1}$,9441, $\bar{1}$,9842, $\bar{1}$,9895.

On peut définir de même 24 journées de trans-

parence particulièrement faible qui donnent :
Série minimum

$\bar{1},7882$, $\bar{1},8664$, $\bar{1},9160$, $\bar{1},9350$, $\bar{1},9756$, $\bar{1},9829$.

La différence entre les chiffres de la série maximum et ceux de la série minimum représente la différence entre les densités optiques des bonnes et des mauvaises journées. Si nous admettons qu'elles ne diffèrent que par la brume, la densité optique de la brume pour les diverses radiations est proportionnelle aux différences entre les nombres des deux séries, soit aux nombres,

191, 126, 108, 90, 86, 66.

Le même travail fait pour d'autres séries donne le Tableau V.

Tableau V.

Densité optique de la brume réelle ($\times 10^4$).

μ	0,35.	0,40.	0,45.	0,50.	0,70.	0,80.
Montezuma. Excellent	191	126	108	90	86	66
» Très bon	263	183	158	141	114	94
Mont Wilson. 1915	337	263	220	193	128	»
» 1916-1918	597	460	392	335	202	»
» 1919-1920	524	513	428	398	251	»

On voit par ces chiffres que la brume *n'est pas neutre.* J'ai déjà appelé l'attention [2] sur l'inexistence de cette brume neutre qui est une invention de théoriciens incapables de regarder autour d'eux et de voir les choses les plus évidentes. La densité de la brume augmente régulièrement du rouge au violet.

10. On peut essayer de représenter cette densité par une expression de la forme

$$D = k\lambda^{-n}. \qquad (2)$$

Il ne faut pas s'attendre à ce que cette expression soit exacte, car elle ne repose sur aucun principe théorique, mais la valeur de n donne une idée grossière des propriétés optiques de la brume. Les valeurs les plus probables, obtenues par construction graphique, sont :

	n.
Mont Wilson. 1916-1918	1,54
» 1915	1,36
» 1919-1920	1,18
Montezuma. Excellent	1,18
» Très bon	1,12

Dans quelques cas, la représentation des chiffres expérimentaux par la formule (2) est très bonne, par exemple au Mont Wilson en 1916-1918.

μ	0,35.	0,40.	0,45.	0,50.	0,70.
$D_{calc} \times 10^4$	579	472	393	334	199
$D_{obs} \times 10^4$	597	460	392	335	202

Mais, pour la dernière série du Mont Wilson et les deux de Montezuma, les différences entre l'observation et le calcul sont supérieures aux erreurs possibles, et il est certain qu'en général la densité de la brume ne peut pas s'exprimer par une formule aussi simple que la formule (2). Nous en retiendrons seulement que, d'une localité à l'autre et d'une année à l'autre, il n'y a pas de très grandes variations; on peut parler d'une *brume moyenne* qui donnera une première approximation de la brume réelle.

La valeur maxima de l'exposant n est environ 1,5. Puisque l'absorption globale varie, comme nous l'avons vu, à peu près suivant la puissance 3,7 de la longueur d'onde, il y a certainement une autre cause d'absorption permanente variant plus vite. A titre d'essai nous pouvons essayer une absorption de Rayleigh en λ^{-R} (R étant un nombre variable avec la longueur d'onde et un peu supérieur à 4), mais avec un coefficient numérique différent de celui que donne la théorie, puisque nous avons vu que celui-ci est incompatible avec l'expérience. Nous chercherons donc à représenter la densité optique totale de l'atmosphère par l'expression

$$D = a_1 k\lambda^{-R} + a_2 B, \qquad (3)$$

B étant la densité de la brume tirée du Tableau V et k le coefficient théorique de Rayleigh-Cabannes. La valeur de a_1 nous donne la diminution que chaque série expérimentale nous oblige à appliquer à la constante théorique.

Les nombres obtenus au Mont Wilson en 1916-1918 sont très bien représentés en prenant $a_1 = 0,79$

μ	0,35.	0,40.	0,45.	0,50.	0,70.
Calculé	0,7634	0,8527	0,8987	0,9263	0,969[illegible]
Observé	0,7636	0,8523	0,8991	0,9261	0,969[illegible]

La représentation des nombres du Mont Wilson en 1915 est presque aussi bonne en prenant $a_1 = 0,90$. Pour les autres séries, les meilleures valeurs de a sont :

Mont Wilson. 1919-1920	0,75
» 1910	0,85
» 1911	0,85
Montezuma. Excellent	0,90
» Très bon	0,90

mais pour toutes ces séries les erreurs résiduelles sont inadmissibles. En particulier les densités ainsi calculées au Mont Wilson pour 0,35 μ sont trop fortes de 0,0103, 0,0200, 0,0167, c'est-à-dire de quantités *dix fois* supérieures aux erreurs possibles. Donc en général la décomposition de l'absorption

à un terme diminué de Rayleigh et un terme expérimental de brume ne correspond pas à la réalité qui est plus complexe. Nous obtenons seulement de cette manière une deuxième approximation.

Il est d'ailleurs évident que, si ce mode de représentation était correct, la valeur de a_1 devrait être toujours la même. Or elle va de 0,75 à 0,90. C'est évidemment la plus petite qui représente la *limite supérieure* de la diffusion moléculaire irréductible; ainsi le coefficient théorique doit être diminué d'*au moins* un quart. Cette diminution était déjà imposée par l'étude des visibilités à grande distance [3].

De toute manière les variations de a_1 montrent combien il serait illusoire de vouloir tirer des mesures du Mont Wilson ou du Mont Montezuma une valeur du nombre d'Avogadro par l'intermédiaire de la théorie de Rayleigh. Il est déjà remarquable qu'on retrouve une valeur approchée, et aucune théorie de ce genre ne peut espérer mieux.

11. **Absorptions localisées.** — L'existence d'écarts résiduels irréguliers entre le calcul et l'expérience s'explique au mieux par des absorptions localisées dans diverses régions du spectre. Les documents contenus dans les *Annals* ne permettent de rien dire au sujet de ces absorptions, dont la somme ne paraît pas dépasser en moyenne 10 pour 100 de la somme des autres. Il semble résulter de ce qui précède qu'elles ont été minima en 1910 et 1911, car les chiffres de ces années sont les plus réguliers. Mais elles ne sont probablement jamais nulles, et, tant qu'elles ne seront pas connues, il sera difficile de faire la part de la diffusion moléculaire.

IV. — Minimum de la densité optique de l'atmosphère.

12. La théorie conduit à deux résultats qui sont exprimés tous deux par la formule de Rayleigh mais qui ont cependant une existence indépendante.

1° L'atmosphère a une densité optique minima, au-dessous de laquelle elle ne peut jamais descendre.

2° Cette densité minima est donnée quantitativement par la formule de Rayleigh-Cabannes.

Le second résultat est, comme nous venons de le voir, contraire à l'expérience; mais cela ne prouve rien pour le premier. La théorie, qui n'est pas en discussion ici, peut donner une approximation du phénomène sans en donner la valeur exacte, et il pourrait y avoir une densité minima inférieure à la valeur théorique. Ce que nous cherchons, c'est la preuve *purement expérimentale* que ce minimum existe, pour ne pas tomber dans le défaut qui consiste à mélanger les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques.

J'ai déjà indiqué [4] le critérium auquel on peut avoir recours quand on dispose d'un nombre suffisant d'observations. Portons sur un diagramme

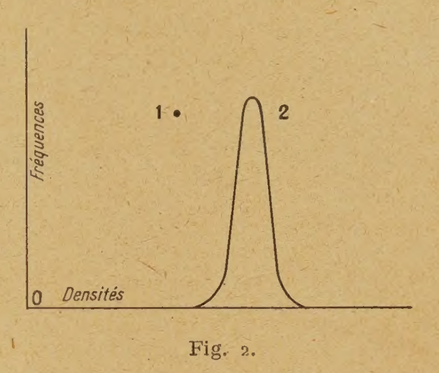


Fig. 2.

les densités en abscisses, et en ordonnées le nombre de jours pendant lesquels ces densités ont été observées. Nous aurons ainsi une courbe de fréquence ou de probabilité des densités. Si l'atmosphère était toujours la même et s'il n'y avait pas d'erreurs de mesure, tous les jours donneraient le même nombre et la courbe se réduirait à un point (*fig.* 2, 1). Les erreurs de mesure transformeront ce point en une courbe en cloche (*fig.* 2, 2).

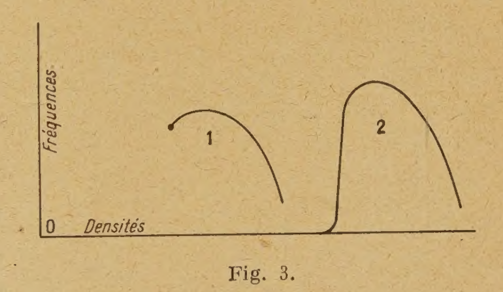


Fig. 3.

Supposons maintenant qu'il y ait un minimum infranchissable, sans erreurs de mesure. Nous aurons la courbe de la figure 3 arrêtée à un point [1]. La forme de la branche de droite est indéterminée. Les erreurs de mesure transformeront le point en une branche de courbe en cloche [2] et la pente de cette branche sera nécessairement plus grande que celle de l'autre. Il est clair que si la courbe était symétrique elle n'indiquerait pas plus l'existence d'un minimum que celle d'un maximum.

La figure 4 reproduit quelques-unes des courbes de fréquence obtenues de cette manière au Mont Wilson et à Montezuma. Pour les discuter, il est préférable de considérer séparément la partie de la courbe qui avoisine le sommet et celle qui constitue le pied.

Dans la région du sommet, certaines de ces courbes ont en effet une pente plus forte à droite (II, IV, VIII, XII, XIV, XVI) : mais sur un plus grand nombre il n'y a pas de différence sensible

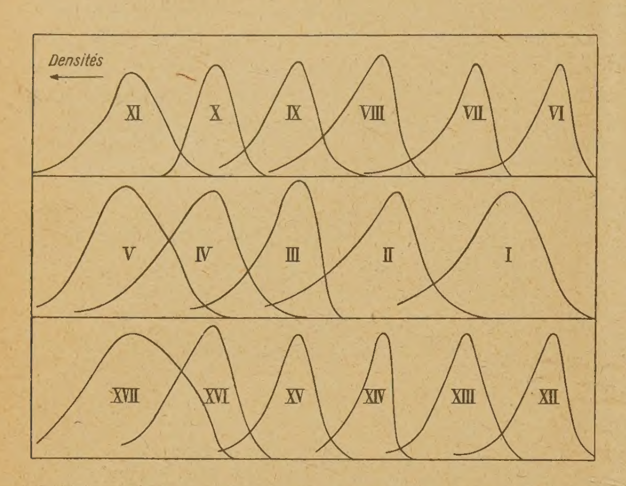


Fig. 4. — Courbes de probabilité des densités atmosphériques. Les densités vont en croissant de droite à gauche. Toutes les courbes sont dessinées à la même échelle des densités, mais avec des origines différentes. Courbes I à V : Mont Wilson (1910-1920, 642 nombres) pour 0,70-0, 50-0, 45-0, 40-0, 35. Courbes VI à XI : Montezuma 1920-1930 « très bon », 256 nombres, pour 0,803; 0,714; 0,499; 0,450; 0,395;0,349 μ. Courbes XII à XVII : Montezuma 1920-1930 « excellent », 153 nombres, pour les mêmes longueurs d'onde.

et les courbes V, XI, XVII ont, au contraire, une pente plus forte à gauche. Si nous nous plaçons à demi-hauteur, la somme des demi-largeurs des 17 courbes est :

A droite (densités faibles)........ 163
A gauche (» fortes)......... 208

La dissymétrie est donc très faible. De plus une partie de cette dissymétrie n'est pas réelle, mais provient du fait que les écarts moyens des mesures, croissant avec les densités, sont plus forts à gauche qu'à droite. Le calcul montre que cet effet explique une différence de 13 pour 100 entre la pente des courbes à gauche et la pente à droite. Il ne reste donc qu'une dissymétrie réelle de 10 pour 100 environ, *trop faible pour qu'on puisse en déduire l'existence d'un minimum*, car l'effet du hasard n'est pas nécessairement symétrique.

Du côté du pied, au contraire, les courbes sont dissymétriques et s'étendent beaucoup plus loin du côté des fortes densités. Cette dissymétrie, qui pouvait être prévue, n'a aucun rapport avec l'existence d'un minimum. Elle provient de ce que les densités ont d'un côté une variation nécessairement limitée puisqu'elles ne peuvent pas devenir négatives; tandis que de l'autre côté les variations possibles sont beaucoup plus étendues, étant limitées seulement par le fait que si l'atmosphère est trop brumeuse les mesures deviennent impossibles.

13. On peut se demander de quelle cause dépend cette loi de fréquence des densités optiques de l'atmosphère. C'est seulement sur place que les observateurs auraient pu en donner l'explication. Mais la description de leurs expériences suggère (conformément aux observations que tout le monde peut faire en montagne) que l'atmosphère est composée de couches superposées, la plus basse brumeuse, la plus haute transparente, dont la surface de séparation est à une certaine hauteur moyenne avec des fluctuations de part et d'autre, suivant en gros les lois du hasard. Il n'y a rien qui permette de savoir si la surface de séparation descend quelquefois au niveau de l'observatoire, ou si elle reste systématiquement au-dessus. Dans les Alpes elle se tient en général en été vers 3500 m, soit 1700 m plus haut que le Mont Wilson; mais elle a en chaque point du globe une hauteur différente.

Rien dans les expériences de la *Smithsonian Institution* ne permet d'affirmer que la transparence maxima de l'atmosphère ait jamais été atteinte ni même qu'elle existe. Ou, en d'autres termes, il n'y a pas de preuve *purement expérimentale* que l'air pur ait un pouvoir absorbant irréductible. Bien entendu, il n'y a pas de preuve du contraire.

14. Tout se passe, en première approximation du moins, comme si la probabilité d'une densité optique de l'atmosphère était, au delà d'un certain chiffre moyen, d'autant plus petite que cette densité est elle-même plus petite. En admettant que la courbe de fréquence soit une courbe normale de probabilité, on voit que les densités faibles deviendront rapidement exceptionnelles, ce qui est entièrement d'accord avec les observations de visibilité à grande distance. C'est ce caractère exceptionnel qui fait la grande difficulté des mesures de la densité optique de l'atmosphère, à moins qu'elles ne soient prolongées pendant longtemps. C'est pourquoi des observations improvisées et de courte durée ne peuvent donner aucun résultat utile.

15. **Nécessité de trois absorptions différentes.** — L'examen des chiffres permet encore une autre conclusion. Supposons que l'absorption soit la somme d'un terme de diffusion moléculaire (quelle que soit sa valeur, pourvu qu'elle soit constante) et d'une seule absorption suivant une loi quelconque $kf(\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde, la fonction f étant toujours la même et le coefficient k étant seul variable d'un jour à l'autre. En ce cas,

les courbes de fréquence auront, en chaque station, la même forme pour toutes les longueurs d'onde puisqu'elles se réduiront à la courbe de fréquence du facteur *k*. Or l'expérience donne un résultat contraire. Les trois courbes de la figure 4 qui correspondent à 0,35 μ ont une forme tout à fait différente de celle des autres, aussi bien au Mont Wilson qu'à Montezuma. Il y a aussi une anomalie pour 0,50 μ. La brume n'a donc pas des propriétés optiques constantes, comme nous l'avions déjà reconnu par une autre méthode (§ 9) et comme d'ailleurs l'expérience l'a montré directement [5].

V. — Valeur de l'erreur de mesure et chiffres absolus de transparence.

16. La forme presque symétrique des courbes de fréquence que nous venons d'examiner pourrait s'expliquer par des erreurs de mesure. Il est donc nécessaire de chiffrer la précision de ces mesures, ce qui est possible en raison de leur grand nombre. J'ai fait les calculs nécessaires sur la meilleure série, les 153 nombres *excellents* de Montezuma. Je ne donnerai pas ces calculs; la méthode, que l'on peut considérer comme évidente, consiste à diviser ces 153 journées en un certain nombre de groupes approximativement homogènes (8 groupes) à l'intérieur desquels les erreurs de mesure subsistent seules. Les erreurs commises sur les diverses longueurs d'onde sont indépendantes les unes des autres. On arrive ainsi au Tableau VI qui donne pour chaque longueur d'onde :

1° L'écart moyen brut ou total des mesures, comprenant les variations réelles de densité et les erreurs de mesure;

2° Les erreurs de mesure;

3° Le rapport de l'écart brut à l'écart moyen de mesure.

Tableau VI.

Écart total et erreur de mesure.

μ.	Total.	Mesure.	Rapport.
0,349........	0,0076	0,0033	2,3
0,395........	0,0044	0,0017	2,6
0,450........	0,0040	0,0016	2,5
0,499........	0,0033	0,0013	2,5
0,714........	0,0028	0,0006	4,6
0,803........	0,0022	0,0005	4,4

Les deux derniers chiffres sont très incertains en raison de leur petitesse; les autres sont concordants et montrent que les écarts *réels* dus aux variations de l'atmosphère sont à peu près 92 pour 100 des écarts bruts. Les courbes de probabilité *réelle* des différentes densités optiques sont donc celles de la figure 5, réduites en largeur de 10 pour 100 environ.

On peut en déduire, par un calcul dont je ne donnerai pas le détail, que dans la série des 153 meilleures journées de Montezuma la transparence théorique de la formule de Rayleigh-Cabannes a été dépassée :

Pour 0,349 μ.........	dans 42	p. 100	des journées
» 0,395..........	» 13	»	»
» 0,450..........	» 2	»	»
» 0,499 à 0,803 μ..	» 0	»	»

La diminution des chiffres, quand on avance vers les grandes longueurs d'onde, est due à l'influence de la brume qui donne dans cette région la plus grande partie de l'absorption. La station de Montezuma a été choisie, en vue de la détermination de la constante solaire, en raison du très grand nombre de journées utilisables dû à la sécheresse du climat; pour la même raison l'air y est rarement pur, et elle ne se prête pas à l'observation des très grandes transparences.

Malgré cela les chiffres relatifs aux deux plus courtes longueurs d'onde suffisent à montrer que la transparence de Rayleigh est souvent dépassée (même sans aucune correction due à la brume ou aux absorptions localisées) et que par suite le coefficient numérique de la formule est trop élevé. Nous voyons en même temps que c'est vers 0,35 μ que l'on trouvera en général la transparence la plus grande. Au-dessous, l'influence de la brume diminue encore, mais celle de l'ozone commence à apparaître.

17. **Conclusion.** — D'après tout ce qui précède, on ne peut trouver dans les mesures de la *Smithsonian Institution*, correctement interprétées, un appui quantitatif pour la théorie. Il faut avoir recours à l'expérience et la question de l'absorption atmosphérique doit être entièrement reprise. J'insiste à nouveau sur ce que de longues études sont nécessaires : plusieurs années dans un observatoire de montagne bien choisi.

Il y a cependant dans les documents *non publiés* du Mont Wilson et des autres stations tout ce qu'il faut pour résoudre le problème. Les documents publiés ne portent que sur un petit nombre de longueurs d'onde, mais les mesures ont porté sur un bien plus grand nombre, qui a atteint 44 au Mont Wilson. La connaissance des écarts moyens des densités avec leur moyenne, déterminée comme nous venons de la voir, donnerait ce qui nous manque. Nous avons vu que l'erreur de mesure est faible vis-à-vis des variations réelles; elle est de plus sans doute variable de manière continue

d'un bout à l'autre du spectre. Donc, en faisant passer une courbe par les 44 valeurs des écarts bruts, portées en ordonnées contre la longueur d'onde en abscisse, les accidents locaux que présenterait cette courbe signaleraient la place et donneraient par leur amplitude la mesure et les fluctuations des absorptions accidentelles localisées. Le problème serait ainsi simplifié. Ce travail est impossible avec 6 ou 7 longueurs d'onde seulement.

18. Il resterait à montrer pourquoi les conclusions des auteurs précédents au sujet des mêmes mesures ne sont pas exactes. Mais je pense que ce travail est inutile.

Je ne répondrai pas aux critiques qui m'ont été adressées par M. Vassy et par M. Dufay : la vérité est maintenant accessible à tous, et j'espère qu'ils sauront la reconnaître.

Manuscrit reçu le 5 juin 1946.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *J. de Physique*, 1935, **6**, p. 401.
[2] *J. de Physique*, 1940, **1**, p. 41.
[3] *C. R. Acad. Sc.*, 1934, **199**, p. 1328.
[4] *J. de Physique*, 1933, **4**, p. 626.
[5] *J. de Physique*, 1935, **6**, p. 403.

SUR LES PRINCIPES GÉNÉRAUX D'UNE NOUVELLE THÉORIE UNITAIRE DES CHAMPS

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri-Poincaré.

La théorie de la relativité générale dans sa première forme faisait dépendre la structure de l'espace de la présence de la matière caractérisée par un tenseur symétrique du second ordre $T_{\mu\nu}$. L'espace était alors défini par une équation telle que

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

dans laquelle le premier membre représentait une combinaison des éléments géométriques les plus simples attachés à l'espace et définis par différentiation à partir des caractéristiques de celui-ci, tandis que le second membre introduisait la matière par le tenseur $T_{\mu\nu}$ et la constante universelle χ.

Une équation du type (1) ne suffit pas à déterminer complètement la géométrie de l'espace, c'est pourquoi la théorie d'Einstein, ainsi que les théories unitaires qui ont suivi, fixaient arbitrairement, *a priori*, la nature géométrique de l'espace de manière à laisser disponible le nombre de paramètres correspondant exactement à la résolubilité de cette équation. De plus, la localisation exacte de la matière obligeait à considérer un espace vide possédant une structure déterminée par la solution de l'équation

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} R = 0 \qquad (2)$$

se raccordant avec la solution de (1) à la surface de la matière.

Cette théorie, qui a connu le succès que l'on sait, s'est trouvée en échec lorsque l'on a voulu compléter la matière par la présence de charges électriques et compléter la théorie du champ gravifique en considérant un champ global gravifique et électromagnétique.

Les idées introduites récemment dans les théories quantiques sur la nature physique des processus d'interactions nous ont amené à reconsidérer le problème général de la théorie des champs physiques et de la structure géométrique de l'espace et nous semblent conduire à l'adoption de principes généraux assez différents de ceux admis jusqu'ici.

On sait que la Mécanique ondulatoire substitue au concept d'actions de champs celui d'interactions s'exerçant entre corpuscules « lourds » par échange d'énergie et de quantité de mouvement avec des corpuscules « légers ».

Des travaux récents ont montré que la considération des corpuscules de spin $2\frac{h}{2\pi}$ permet de définir des fonctions d'ondes qui satisfont du point de vue statistique à des équations tensorielles rappelant le formalisme des théories unitaires, ces fonctions d'ondes ayant les caractères tensoriels des éléments géométriques utilisés pour caractériser la structure de l'espace. Ceci nous conduit à un principe d'équi-

valence : la théorie unitaire générale constitue une interprétation géométrique par des propriétés particulières de l'espace d'équations liant des fonctions d'ondes de l'espace de la relativité restreinte à des tenseurs densitaires attachés à la matière quantique.

Les théories quantiques font correspondre aux corpuscules des densités de valeurs moyennes qui sont définies dans tout l'espace et ne permettent pas de séparer une théorie du vide d'une théorie de la matière. De plus, la matière est essentiellement quantique. Elle est douée de masse, de spin, de moment électromagnétique et caractérisée par une collection de tenseurs densitaires.

La description par le tenseur $T_{\mu\nu}$ d'Einstein est insuffisante. Par exemple, dans le cas où la matière est un électron représenté par un système de fonctions d'ondes satisfaisant à l'équation de Dirac usuelle introduisant les 16 matrices γ_A :

$$(\gamma_0 = 1,\ \gamma_\mu,\ i\gamma_\mu\gamma_\nu,\ i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5)$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4),$$

la matière électronique en mouvement est définie par les densités

$$\psi^+\gamma_A\psi, \tag{3}$$

$$T_{\mu;A} = \frac{h}{2\pi i}[\psi^+_\mu\gamma_A\psi - \psi^+\gamma_A\psi_\mu], \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} T_{[\mu\nu];A} = -T_{[\nu\mu];A} &= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{i}[\psi^+_\mu\gamma_A\psi_\nu - \psi^+_\nu\gamma_A\psi_\mu], \\ T_{(\mu\nu);A} = \quad T_{(\nu\mu);A} &= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 [\psi^+_\mu\gamma_A\psi_\nu + \psi^+_\nu\gamma_A\psi_\mu]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &T_{[\mu_1\ldots\mu_p;\nu_1\ldots\nu_q];A} \\ &\quad = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{p+q} \frac{1}{i}[\psi^+_{\mu_1\ldots\mu_p}\gamma_A\psi_{\nu_1\ldots\nu_q} - \psi^+_{\nu_1\ldots\nu_q}\gamma_A\psi_{\mu_1\ldots\mu_p}], \\ &T_{(\mu_1\ldots\mu_p;\nu_1\ldots\nu_q);A} \\ &\quad = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{p+q} [\psi^+_{\mu_1\ldots\mu_p}\gamma_A\psi_{\nu_1\ldots\nu_q} + \psi^+_{\nu_1\ldots\nu_q}\gamma_A\psi_{\mu_1\ldots\mu_p}] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$\left(\text{Nous posons } \psi_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu};\quad \psi^+_\mu = \frac{\partial\psi^+}{\partial x^\mu}\right).$

Les densités (3) interviennent dans les interactions mésiques et électromagnétiques. Les densités des types (4) et (5) sont covariantes aux fonctions d'ondes des particules de spin $2\frac{h}{2\pi}$ et se rattachent à la théorie unitaire que nous considérons ici.

$T_{\mu;\nu}$ est le tenseur de Tétrode non symétrique. Le tenseur de Tétrode symétrique $\frac{1}{2}(T_{\mu;\nu} + T_{\nu;\mu})$ correspond au tenseur matériel d'Einstein et nous avons montré (¹) que sa considération dans les processus d'interactions permettait de retrouver, dans le cas statique, la loi de l'attraction newtonienne.

Les densités des types (6) interviennent dans les interactions s'effectuant par l'intermédiaire de corpuscules de spins supérieurs à $2\frac{h}{2\pi}$.

D'une façon générale, nous considérons qu'une théorie unitaire des champs gravifiques et électromagnétiques doit introduire, lorsque la matière est représentée par des solutions de l'équation de Dirac, l'ensemble des densités $T_{\mu;A}$, $T_{[\mu\nu];A}$ et $T_{(\mu\nu);A}$ et non pas seulement la densité

$$\frac{1}{2}(T_{\mu;\nu} + T_{\nu;\mu}).$$

L'ensemble de ces tenseurs introduit les différents caractères de la matière :

pondéromoteurs par

$$T_{\mu;\rho},\quad T_{\mu;\nu},\quad T_{[\mu\nu];\rho},\quad T_{[\mu\nu],\rho},\quad T_{(\mu\nu);\rho},\quad T_{(\mu\nu),\rho}; \tag{7}$$

électromagnétiques par

$$T_{\mu;\rho\sigma},\quad T_{[\mu\nu];\rho\sigma},\quad T_{(\mu\nu),\rho\sigma}; \tag{8}$$

de spin par

$$T_{\mu;\rho\sigma\tau},\quad T_{\mu\nu];\rho\sigma\tau},\quad T_{(\mu\nu),\rho\sigma\tau}. \tag{9}$$

La théorie unitaire géométrique déduite des équations d'ondes s'exprimera par des équations différentielles dont les premiers membres seront constitués par des combinaisons de grandeurs géométriques attachées à l'espace le plus général, c'est-à-dire dépendant des $g_{\mu\nu}$, du tenseur de courbure $R_{[\mu\nu];[\rho\sigma]}$ et de ses contractés, du tenseur de torsion $S_{\mu\nu,\rho}$ et de ses contractés et dont les seconds membres seront des combinaisons des tenseurs (4) et (5).

La géométrie de l'espace ne se présentant que comme interprétation de la structure des fonctions d'ondes déterminée elle-même par les densités matérielles, ne doit plus être introduite *a priori*. Elle résulte strictement de l'état particulier de la matière.

L'interprétation de la structure de l'espace par une géométrie particulière telle que par exemple la géométrie riemanienne qui annule la torsion de l'espace ne peut résulter que d'un état corpusculaire particulier réduisant les tenseurs matériels a une forme entraînant une solution des équations d'ondes interprétable par une torsion nulle de l'espace.

La théorie du corpuscule de spin $2\frac{h}{2\pi}$ se simplifiant lorsque l'on introduit une cinquième dimension x^5 complétée par une condition cylindrique telle que $\frac{\partial\Phi}{\partial x^5} = 0$, la théorie unitaire générale devra admettre cette simplification qui rassemble les densités (8) et (9) sous la forme

$$T_{\alpha;\beta\gamma},\quad T_{[\alpha\beta];\gamma\delta},\quad T_{(\alpha\beta);\gamma\delta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5);$$

en associant le spin au moment électromagnétique.

Manuscrit reçu le 15 juin 1946.

(¹) *J. Physique*, 1945, **6**, p. 115-120.

A PROPOS DU TERME ALTERNATIF DE LA BIRÉFRINGENCE ÉLECTRIQUE DES SOLS DE BENTONITE

Par J. RABINOVITCH.

Laboratoire des Recherches physiques à la Sorbonne.

Sommaire. — L'étude de la biréfringence électrique de sols de bentonite en tension alternative montre que la biréfringence électrique peut être considérée comme la somme de deux termes, l'un constant, l'autre alternatif. Cette remarque permet, dans certains cas, de déceler dans un sol la présence de deux sortes au moins de particules à propriétés différentes.

Mueller, Sakmann, Norton (1) ont étudié la biréfringence électrique β de sols de bentonite placés dans un champ électrique alternatif.

Faisant varier la fréquence N, ils ont constaté que la biréfringence est toujours positive pour les grandes fréquences et croit alors normalement avec l'intensité E du champ électrique, tandis que pour

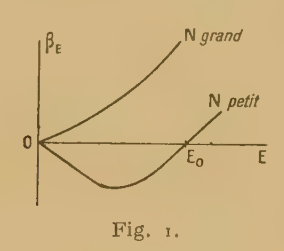


Fig. 1.

les fréquences faibles, la biréfringence, d'abord nettement négative, passe par un maximum absolu et devient positive pour une valeur E_0 du champ d'autant plus grande que la fréquence est plus faible (*fig.* 1).

Mueller et Sakmann admettent, pour expliquer la différence de comportement des sols pour les différentes fréquences que l'effet électrooptique est la superposition d'un effet normal positif suivant la loi de Kerr — produit par l'orientation de micelles anisotropes — et d'un effet électrooptique nouveau provoquant une biréfringence électrique négative. L'effet normal, proportionnel à la concentration, subsiste seul pour les grandes fréquences; il croît rapidement avec la grosseur des particules et tend vers une saturation. L'effet négatif ne s'observe que pour des champs et des fréquences faibles, à condition que les particules ne soient pas trop grosses (auquel cas l'effet normal prédomine et masque l'effet négatif) (*fig.* 2).

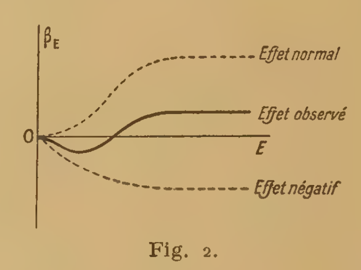


Fig. 2.

Par ailleurs, d'après Mueller, la biréfringence électrique pour une fréquence et un champ électrique déterminés se compose de deux termes : d'un terme constant et d'un terme alternatif de fréquence double de celle du champ électrique.

J'ai d'abord voulu observer expérimentalement la présence de ce terme alternatif de la biréfringence électrique. Pour cela j'ai utilisé le montage suivant (*fig.* 3).

Une lampe à vapeur de mercure S éclaire un monochromateur à prisme Pellin-Broca M réglé pour la raie verte du mercure. Le faisceau émergent ($\lambda = 546$ mμ), après traversée d'un polariseur à champ normal P monté dans un cercle gradué, converge légèrement à l'intérieur de la cellule de Kerr K alimentée par une tension alternative de 110 V : 50 p.

Le montage d'analyse de la lumière elliptiquement polarisée est un système à pénombres constitué par un compensateur quart d'onde C, un prisme de Lippich l recouvrant la moitié du champ et solidaire d'un Glazebrook G monté dans un cercle gradué, une lentille d'observation des plages suivie d'un œilleton.

Un moteur m, dont on peut régler la vitesse de régime, entraîne un disque D perforé de trous

(1) H. Mueller, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 508 et 792. — F. J. Norton, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 668. — H. Mueller et B. W. Sakmann, *Phys. Rev.*, 1939, **56**, p. 615.

équidistants permettant de laisser passer le faisceau à étudier à intervalles réguliers, par exemple lorsque la tension électrique aux bornes de la cellule a une même valeur. Pour faire ce réglage, il suffit de stroboscoper au moyen du disque perforé une lampe à filament de carbone *f*, alimentée par le 110 V alternatif, placée au voisinage d'un aimant *a*. (On observe l'image du filament de la lampe sur l'écran en verre dépoli E.)

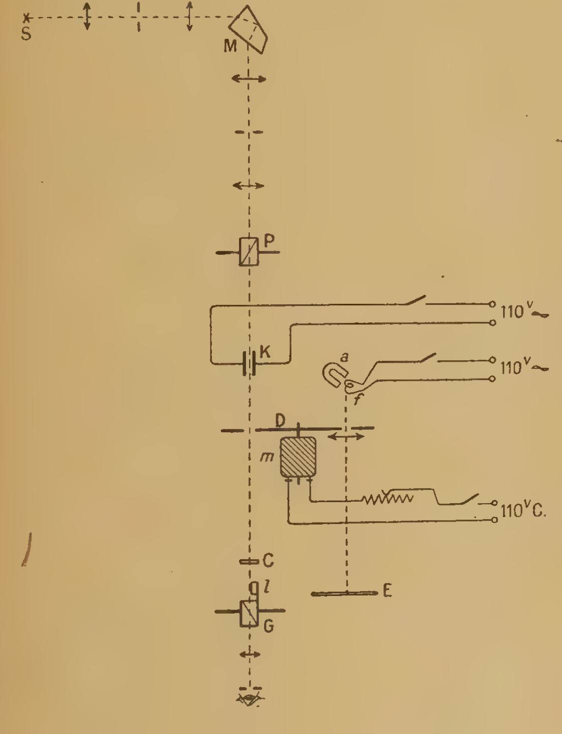


Fig. 3.

Le disque étant immobile et laissant passer le faisceau par un de ses trous, on règle l'analyseur à l'égalité des plages, la cellule de Kerr étant excitée. On obtient ainsi la biréfringence électrique moyenne.

Le moteur étant mis en marche, on peut chercher à en régler la vitesse de façon à obtenir l'immobilité de l'image du filament; on n'observe alors le phénomène de Kerr qu'à des instants où la tension a une même valeur. En réalité il est inutile de s'astreindre à un réglage très fin : on constate que lorsque l'image du filament se déplace lentement sur l'écran à partir de sa position de zéro, l'égalité des plages est détruite et l'on observe successivement l'obscurcissement de l'une ou de l'autre plage selon que l'image du filament a atteint l'une ou l'autre de ses élongations maxima.

Cette expérience montre bien que la biréfringence électrique oscille autour de sa valeur moyenne dans des proportions non négligeables et qu'elle peut être considérée comme la composition d'un terme constant auquel s'ajoute un terme oscillatoire.

Mueller remarque que ces deux termes ont même signe. Nous allons montrer qu'il n'en est pas toujours ainsi et que les deux termes peuvent avoir des signes contraires. Quand on fait des mesures sur des sols ayant séjourné plus ou moins longtemps dans la cuve, on constate que la biréfringence électrique évolue rapidement avec le temps. Les deux termes sont d'abord positifs tous les deux, puis à un certain moment le terme constant de la biréfringence électrique est positif tandis que le terme alternatif présente des élongations négatives, enfin les deux termes deviennent tous deux négatifs.

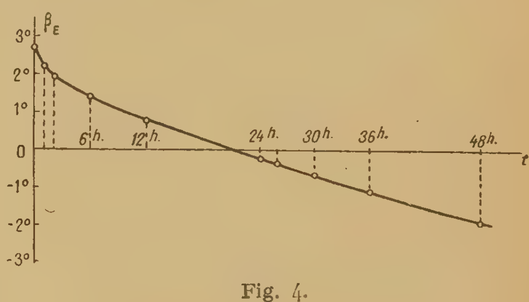


Fig. 4.

Le tableau ci-dessous et la figure 4 donnent les valeurs de la biréfringence électrique moyenne d'un échantillon en fonction de la durée *t* de séjour dans la cellule de Kerr (la cellule n'étant excitée qu'au moment des mesures).

t.	0.	1h.	2h.	6h.	12h.
β_E......	2°,67	2°,20	1°,95	1°,41	0°,78
t.	24h.	26h.	30h.	36h.	48h.
β_E......	—0°,20	—0°,36	—0°,62	—1°,03	—1°,90

Le changement de signe observé subsiste même après agitation du liquide. Il est probable que les particules qui contribuent à donner une biréfringence électrique positive tombent et se collent aux parois de la cellule, de sorte que l'agitation ne les remet pas en suspension.

A chacune de ces mesures j'ai vérifié, par le procédé stroboscopique, l'existence d'un terme alternatif. Je n'en ai pas mesuré l'amplitude avec précision, mais j'ai pu constater que lorsque la biréfringence électrique moyenne est faible, au moment où l'image du filament atteint une de ses élongations maxima, l'égalité des plages est rétablie

pour une biréfringence électrique faible mais de signe contraire à celle de la biréfringence électrique moyenne.

Essayons schématiquement d'expliquer cet aspect du phénomène. Considérons une particule du sol placée dans le champ électrique E de période T. Cette particule est soumise à un couple orienteur C de période $T' = \frac{T}{2}$ (*fig.* 5).

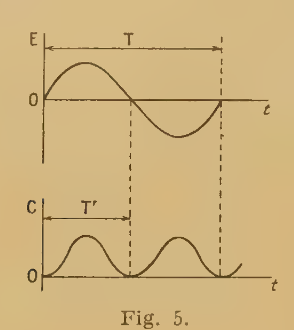


Fig. 5.

Si la particule n'était soumise à aucune force d'inertie, à chaque passage du champ électrique par la valeur o correspondrait une biréfringence électrique nulle. Du fait de l'inertie il y aura une biréfringence électrique résiduelle qui sera d'autant plus importante que la fréquence du champ sera grande. La biréfringence électrique sera donc de la forme

$$\beta = \beta_0 + \beta_1,$$

β_0 étant une constante que nous pouvons appeler biréfringence d'inertie et β_1 une fonction périodique de période $T' = \frac{T}{2}$ (*fig.* 6).

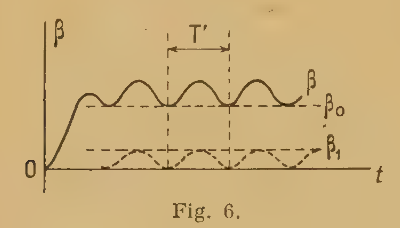


Fig. 6.

Pour les solutions concentrées, où la particule se meut difficilement, le terme périodique est négligeable. Pour des solutions diluées, au contraire, il peut devenir très important. Mais de toutes façons lorsqu'il n'y a qu'une seule espèce de particules, nous pouvons choisir β_0 de façon que les deux termes β_0 et β_1 de la biréfringence électrique aient même signe.

Si deux espèces de particules coexistent, présentant des anisotropies électriques et optiques de même signe, de façon à s'orienter dans le même sens, il est évident que les deux termes de la biréfringence électrique du sol sont encore de même signe. Mais s'il y a deux espèces de particules provoquant des biréfringences de signes contraires, la biréfringence résultante est de la forme

$$B = B_0 + B_1,$$

dans laquelle B_0, résultant de deux termes constants, et B_1, résultant de deux termes alternatifs, peuvent avoir même signe (*fig.* 7 *a*) ou signes contraires (*fig.* 7 *b*).

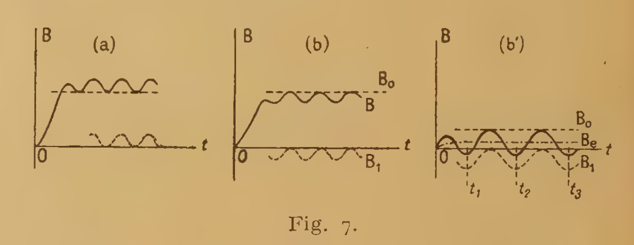


Fig. 7.

Comme il est difficile de déterminer le début de la courbe $B = f(t)$, rien ne différentie à première vue les courbes 7 *a* et 7 *b*, sauf dans le cas où la partie ondulatoire de la courbe coupe l'axe Ot (*fig.* 7 *b'*).

Dans ce cas de figure la biréfringence électrique moyenne B_E est positive, tandis que la biréfringence électrique mesurée aux instants t_1, t_2, ... est négative. C'est ce qui a été observé quand la biréfringence électrique moyenne du sol étudié plus haut était devenue faible.

On peut donc, quand on est en présence d'un terme constant et d'un terme alternatif de signes contraires, émettre l'hypothèse de la présence de deux sortes au moins de particules à propriétés différentes. Cet examen sommaire de la question confirme l'intérêt qu'il y a dans l'étude des solutions colloïdales à suivre l'évolution en fonction du temps de la biréfringence électrique en tension alternative.

Manuscrit reçu le 25 février 1946.

LA THÉORIE DES FILTRES ÉLECTRIQUES ET LES POLYNOMES DE TCHEBICHEF

PAR A. COLOMBANI.

Sommaire. — En développant les équations générales des filtres électriques, j'ai pu mettre en évidence un certain nombre de formules de récurrence très simples qui obéissent aux mêmes lois que les polynomes solutions de l'équation différentielle de Tchebichef.

Par leur intermédiaire j'ai pu donner l'expression de l'impédance caractéristique, étudier la résonance de sortie et les intensités, puis passer du cas de la propagation par filtres à celui de la propagation sur lignes à constantes uniformément réparties.

Enfin, j'ai relié mathématiquement la théorie des polynomes de Tchebichef à celle des filtres (1).

CHAPITRE I.

Considérons la suite de n circuits identiques rangés de telle façon que l'un quelconque d'entre eux ne soit soumis qu'à l'action de celui qui le précède et de celui qui le suit (*fig.* 1).

Fig. 1.

Supposons une force électromotrice d'amplitude V_0 et de pulsation ω, agissant sur le premier circuit. Soit x_2 l'impédance de couplage (par dérivation ou par induction) de chaque cellule et x_1 l'autre impédance (2).

Entre les intensités et les tensions consécutives on a les relations bien connues

$$V_\nu - V_{\nu+1} = x_1 I_\nu,$$
$$V_\nu = x_2(I_{\nu-1} - I_\nu),$$
$$V_{\nu+1} = x_2(I_\nu - I_{\nu+1}).$$

D'où l'on tire

$$x_1 I_\nu = x_2(I_{\nu-1} + I_{\nu+1} - 2 I_\nu)$$

et en posant

$$x = \frac{x_1}{x_2} + 2, \qquad \boxed{I_{\nu-1} - x I_\nu + I_{\nu+1} = 0.}$$

1. **Mise en évidence et récurrence de la fonction y.** — 1° A l'aide de cette formule exprimons I_ν en fonction de I_0 et $I_{\nu-1}$.

On a

$$I_0 - x I_1 + I_2 = 0,$$
$$I_1 - x I_2 + I_3 = 0,$$
$$I_0 - (x^2 - 1) I_2 + x I_3 = 0,$$
$$I_2 - x I_3 + I_4 = 0,$$
$$I_0 - (x^3 - 2x) I_3 + (x^2 - 1) I_4 = 0.$$
. . . .

Généralement

$$I_0 - y_n I_n + y_{n-1} I_{n+1} = 0,$$

avec

$$y_{n-1} - x y_n + y_{n+1} = 0,$$

y_n étant un polynome de degré n en x

$$y_n(x) = x^n - \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \binom{n-2}{2} x^{n-4} - \binom{n-3}{3} x^{n-6} + \ldots + (-1)^s \binom{n-s}{s} x^{n-2s} + \ldots,$$

$\binom{n-s}{s}$ désignant le nombre de combinaisons de $(n-s)$ termes s à s.

2° En exprimant I_ν en fonction de I_0 et de I_1 on a de même

$$I_{\nu+1} - y_{r+1} I_{\nu-r} + y_r I_{\nu-r+1} = 0.$$

Pour $r = \nu - 1$

$$I_{\nu+1} = y_\nu I_1 - y_{\nu-1} I_0.$$

(1) Dans l'étude des propriétés électrostatiques des systèmes sphériques, A. Guillet [11] a mis en évidence des fonctions intéressantes auxquelles il donne le nom de « polynomes électrosphériques ». Je montre que ces polynomes constituent les solutions de l'équation différentielle de Tchebichef (cas particulier des polynomes de Jacobi) dont certaines propriétés mathématiques très importantes pour la Physique ont été établies dans les 40 dernières années [7], [8], [9].

Je crois signaler utilement ce fait aux Physiciens qui poursuivent des études sur les applications des polynomes électrosphériques [12].

(2) Aucune induction mutuelle n'est supposée exister entre x_1 et x_2 et les pertes sont considérées comme négligeables.

Hors récurrence

$$V_0 = (x_1 + x_2)I_0 - x_2 I_1, \qquad \frac{V_0}{x_2} = -I_1 + (x-1)I_0.$$

$$V_1 = x_2(I_0 - I_1), \qquad \frac{V_1}{x_2} = -I_1 + I_0.$$

En récurrence

$$I_n = y_{n-1} I_1 - y_{n-2} I_0.$$

$$\frac{V_n}{x_2} = (y_{n-2} - y_{n-1})I_1 + (y_{n-2} - y_{n-3})I_0.$$

3° En fonction de I_0 et V_0

$$I_\nu = [(x-1)y_{\nu-1} - y_{\nu-2}]I_0 - y_{\nu-1}\frac{V_0}{x_2},$$

$$V_\nu = [xy_{\nu-2} - (x-1)y_{\nu-1} - y_{\nu-3}]x_2 I_0 + [y_{\nu-1} - y_{\nu-2}]V_0,$$

$$V_1 = -x_1 I_0 + V_0.$$

Par la récurrence de y on obtient

$$V_n = -y_{n-1}x_1 I_0 + (y_{n-1} - y_{n-2})V_0,$$

$$I_n = (y_n - y_{n-1})I_0 - y_{n-1}\frac{V_0}{x_2}.$$

Nota. — Par

$$I_0 = y_n I_n - y_{n-1} I_{n+1}$$
$$= y_n[y_{n-1}I_1 - y_{n-2}I_0] - y_{n-1}[y_n I_1 - y_{n-1} I_0]$$

il vient cette utile propriété des y

$$y_n^2 = 1 + y_{n-1}y_{n+1},$$

ou encore par

$$y_{n+1} = xy_n - y_{n-1},$$
$$y_n^2 + y_{n-1}^2 - xy_n y_{n-1} = 1.$$

2. Impédance d'entrée. — Soit Z_e l'impédance d'entrée pour un débit I_n sur x_s.

On a

$$V_0 = Z_e I_0.$$

Posons

$$x_s = \sigma x_2,$$
$$V_n = (x_1 + x_s)I_n.$$

Or

$$V_n = -y_{n-1}x_1 I_0 + (y_{n-1} - y_{n-2})V_0$$
$$= (x_1 + x_s)\left[(y_n - y_{n-1})I_0 - y_{n-1}\frac{V_0}{x_2}\right],$$

d'où

$$Z_e = \frac{(x+\sigma-2)y_n - \sigma y_{n-1}}{(x+\sigma-1)y_{n-1} - y_{n-2}}x_2.$$

3. Impédance de sortie

$$V_0 = Z_s I_n,$$

$$Z_s = \frac{(x+\sigma-2)y_n - \sigma y_{n-1}}{y_n y_{n-1} - y_n y_{n-2} + y_{n-1}y_{n-2} + (1-x)y_{n-1}^2}x_2,$$

avec les récurrences

$$y_{n-2} = xy_{n-1} - y_n,$$
$$y_n^2 + y_{n-1}^2 = 1 + xy_n y_{n-1}.$$

Le dénominateur se réduit à 1, ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{x_2}Z_s = (x+\sigma-2)y_n - \sigma y_{n-1}.}$$

Particularités de $y_{(x)}$. — Avant de passer à l'étude de la résonance de sortie je donne quelques particularités de y que nous étudierons plus loin en détail (Chap. IV et V).

$$y_n^{(x)} = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos\frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\arccos\frac{x}{2}\right]} = \frac{\mathrm{sh}\left[(n+1)\,\mathrm{arc\,ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\mathrm{sh}\left[\mathrm{arc\,ch}\frac{x}{2}\right]},$$

$$y_n(2) = (-1)^n \qquad y_n(-2) = n+1,$$

$$y'_n(2) = (-1)^{n+1}y'_n(-2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$y_n = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \Sigma_s(-1)^s\binom{n-s}{s}x^{n-2}.$$

n.	
0	1
1	x
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 2x$
4	$x^4 - 3x^2 + 1$ [3]
5	$x^5 - 4x^3 + 3x$
6	$x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$
7	$x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x$
8	$x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1$
9	$x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x$
10	$x^{10} - 9x^8 + 28x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1$

n.	$y_n(1)$.	$y_n(-1)$.
$6r$	1	1
$6r+1$	1	1
$6r+2$	0	0
$6r+3$	-1	1
$6r+4$	-1	-1
$6r+5$	0	0

$$(4-x^2)y''_n - 3xy'_n + n(n+2)y_n = 0,$$
$$y_{n+1} + y_{n-1} = xy_n,$$
$$(4-x^2)y'_n + nxy_n = 2(n+1)y_{n-1},$$
$$(4-x^2)y'_n = (n+2)y_{n-1} - ny_{n+1}.$$

CHAPITRE II.

Résonance de sortie — On a

$$Z_s = (x_1 + x_s)y_n(x) - x_s y_{n-1}(x);$$

[3] Ce sont les polynomes électrosphériques de A. Guillet [11]

avec

$$y_n^{(x)} = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos\frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\arccos\frac{x}{2}\right]} = \frac{\mathrm{sh}\left[(n+1)\,\mathrm{arcch}\frac{x}{2}\right]}{\mathrm{sh}\left[\mathrm{arcch}\frac{x}{2}\right]}$$

et

$$x = \frac{x_1}{x_2} + 2.$$

En première approximation, x_1 et x_2 sont des imaginaires pures, avec $\frac{x_1}{x_2} < 0$ et réel.

Pour $|x_s| \ll |x_1|$ on peut déduire une formule approchée

$$\zeta_s(n) = \frac{Z_n}{x_s} = y_n\left(\frac{x_1}{x_2}+2\right) - y_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_2}+2\right),$$

$$\zeta_s(n) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\sin\left[(n+1)\arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right)\right]\\ \quad -\sin\left[n\arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right)\right]\end{array}\right\}}{\sin\left[\arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right)\right]},$$

$$\zeta_s(n) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right)\right]}.$$

Notation :

$$\beta = \arccos\left(\frac{x_1}{2x_2}+1\right),$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} + 2 = x,$$

$$\zeta_s(n) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos(2n+1)\alpha}{\cos\alpha}.$$

1. **Fréquences propres.** — En posant

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

on obtient pour β, les $(2n+1)$ racines

$$\beta = \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \qquad \text{avec } k = 0, 1, 2, \ldots, 2n;$$

$\cos\frac{\beta}{2} = 0$ donne, pour β l'unique racine $\beta = \pi$, c'est-à-dire $k = n$.

Donc $\xi_s(n)$, fonction de β, a les $2n$ racines

$$\beta = \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad n+1, \ldots, 2n.$$

Cela entraîne pour $\frac{x_1}{x_2}$ les n *valeurs distinctes*

$$\frac{x_1}{x_2} = 2\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) - 1\right]$$
$$= -4\sin^2\left[\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right], \qquad \text{avec } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

qui constituent les fréquences propres.

2. **Maxima.** — L'étude de la dérivée nous donne

$$\frac{d\zeta_s(n)}{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} = \frac{d\zeta_s(n)}{dx} = -\frac{1}{4\sin 2\alpha}\cdot\frac{d\zeta_s(n)}{d\alpha}$$
$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}(2n+1)\sin[(2n+1)\alpha]\cos\alpha\\ \quad -\cos[(2n+1)\alpha]\sin\alpha\end{array}\right\}}{4\sin 2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Les maxima ont lieu pour

$$\mathrm{tg}\,\alpha = (2n+1)\,\mathrm{tg}[(2n+1)\alpha].$$

Ils sont voisins de $\mathrm{tg}\,[(2n+1)\,\alpha] = 0$, au moins pour ceux dont le rang k' n'est pas élevé,

$$\alpha = \frac{k'}{2n+1}\pi + \varepsilon.$$

Nous traiterons $(2n+1)\,\varepsilon$ comme petit (sauf à le justifier sur le résultat).

Posons en outre

$$\mathrm{tg}\left(\frac{k'\pi}{2n+1}\right) = \eta,$$

η ne sera pas traité comme petit.

Il vient

$$(2n+1)\,\mathrm{tg}[\,k'\pi + (2n+1)\varepsilon] = \mathrm{tg}\left[\frac{k'\pi}{2n+1} + \varepsilon\right],$$

$$(2n+1)^2\varepsilon = \frac{\eta+\varepsilon}{1-\eta\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{4n(n+1)},$$

ce qui justifie l'hypothèse $(2n+1)\,\varepsilon \ll 1$ tant que k' n'est pas voisin de n.

La valeur du maximum dans cette hypothèse est

$$\zeta_s(n) = \frac{(-1)^{k'}\sqrt{1+\eta^2}}{1 - \frac{\eta^2}{4n(n+1)}}.$$

Tant que n reste petit, $|\zeta_s(n)|$ reste de l'ordre de 1.

Voyons maintenant ce qui se passe pour k' élevé, voisin de n.

$\zeta_s(n)$, polynome de degré n, a ses n racines en x réelles et comprises entre -2 et $+2$, c'est-à-dire $\frac{x_1}{x_2}$ compris entre -4 et 0.

$\zeta'_s(n)$, polynome de degré $n-1$ en x, a $n-1$ racines réelles, comprises dans cet intervalle et séparant les n racines de $|\zeta_s(n)|$. Donc de $x = -\infty$ à $x = 2\cos\left(\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)$, $|\zeta_s(n)|$ décroît de façon monotone de $+\infty$ à 0. De $x = 2\cos\frac{\pi}{2n+1}$ à $x = +\infty$, $|\zeta_s(n)|$ croît de façon monotone de 0 à $+\infty$.

Pour $x = -2$, $\quad \zeta'_s(n) = (-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

pour $x = +2$, $\quad \zeta'_s(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le premier maximum de $|\zeta_s(n)|$ pour x croissant est compris entre

$$x = 2\cos\left(\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right) \quad \text{et} \quad x = 2\cos\left(\frac{2n-3}{2n+1}\pi\right).$$

Il correspond à $k' = n - 1$.

Posons

$$\alpha = \frac{n-1}{2n+1}\pi + \varepsilon,$$

$$\eta = \operatorname{tg}\left(\frac{n-1}{2n+1}\pi\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{2(2n+1)}}.$$

$$\text{Pour } n \to \infty, \qquad \eta \to \frac{2(2n+1)}{3\pi}.$$

Traitons encore $(2n+1)\varepsilon$ comme petit.

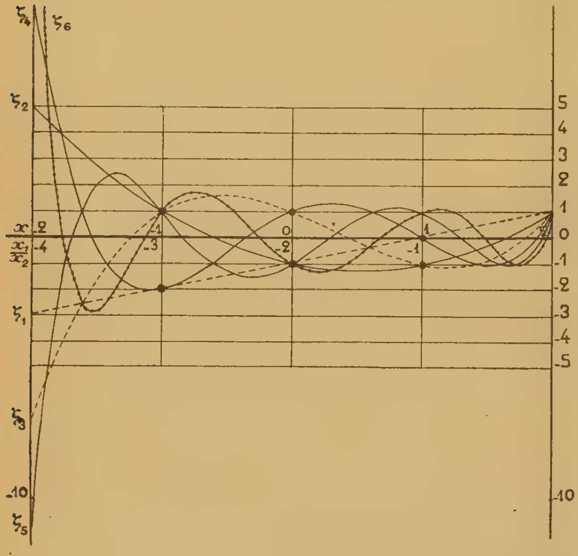


Fig. 2.

On a

$$\frac{\eta+\varepsilon}{1-\eta\varepsilon} = (2n+1)^2\varepsilon,$$

$$\eta + \varepsilon \neq \eta \qquad (2+1)^2\varepsilon\left(\frac{1}{\eta} - \varepsilon\right) = 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\eta}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{2n+1}\right)^2}\right],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\eta}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{4(2n+1)}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}\right],$$

$$\varepsilon = \frac{0,21}{2n+1}.$$

$(2n+1)\varepsilon = 0,21$ radian $= 12°36'$. Cette valeur sans être très petite, laisse au calcul le caractère d'une approximation raisonnable.

On a alors, en ce point,

$$\zeta_s(n) = (-1)^{n-1}\frac{\cos(2n+1)\varepsilon}{\sin\dfrac{3\pi}{2(2n+1)}}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2(2n+1)}{3\pi}\cos(12°36').$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2(2n+1)}{3\pi}0,976$$

$$= (-1)^{n-1}0,216(2n+1).$$

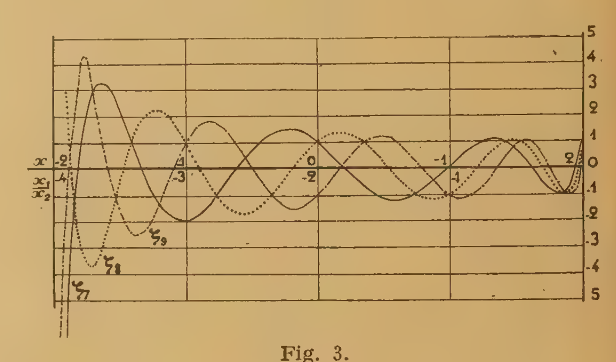


Fig. 3.

Pour $n = 10$, cela fait

$$\varepsilon = \frac{1}{100}\text{ radian} = 0°,57 = 34',$$

$$\zeta_s(n) = -4,54.$$

Le calcul exact, par approximations successives donne

$$\alpha = 77°43'51''\frac{6}{10}, \qquad x = -1,81938,$$

$$\zeta_s(n) = -4,59825, \qquad \frac{x_1}{x_2} = -3,81938,$$

avec

$$\frac{n-1}{2n+1}\pi = \frac{9}{21}\pi = 77°8'34''\frac{2}{7},$$

$$\text{soit } \varepsilon = 35',17'' = \frac{1,03}{100}\text{ radian}.$$

L'approximation première est donc excellente.

En résumé, quand n augmente il y a :

1° Resserrement de la bande; l'écart entre le zéro $k = n - 1$ et le maximum voisin $k' = n - 1$ devient plus étroit proportionnellement à n;

2° L'amplitude de variation entre le zéro et le maximum croît comme n.

De même entre le zéro et le point fixe voisin $x = -2$ $\left(\frac{x_1}{x_2} = -4\right)$, diminution de la variation de x, augmentation de l'amplitude :

$$\zeta_s(n)(-2) = (-1)^n(2n+1).$$

3° En revanche, multiplication des bandes de résonance.

Les figures 2, 3, 4 donnent les courbes de $\zeta_s(n)$ pour les dix premières valeurs de n.

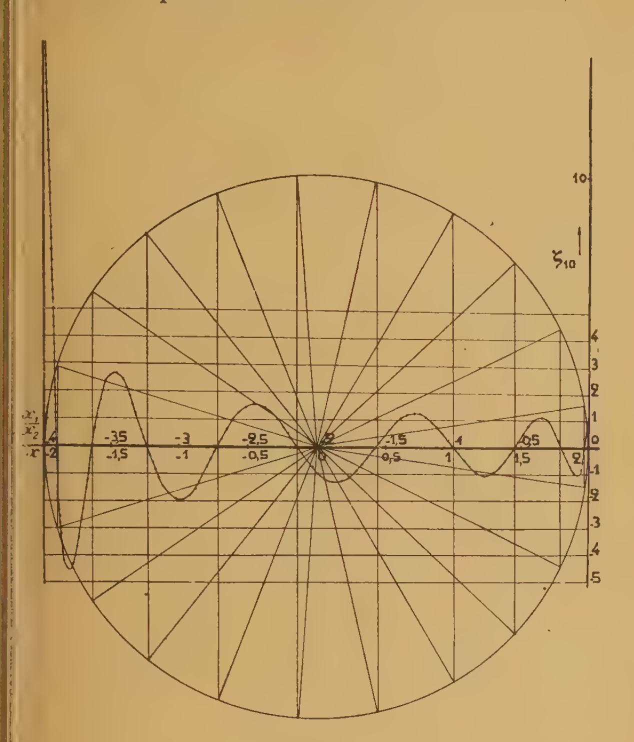


Fig. 4.

J'ai tracé ces courbes après avoir dressé les tableaux donnant les valeurs de y_n puis de $\zeta_s(n)$ (Tableaux I et II), ainsi que celles de leurs racines.

3. Résidu au zéro. — Le résidu au zéro peut s'écrire

$$\zeta_s(n) = y_n(x+j\xi) - y_{n-1}(x+j\xi)$$
$$0 = y_n(x) - y_{n-1}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\zeta_s(n) = j\xi\,[y'_n(x) - y'_{n-1}(x)],$$

est traité comme petit.

D'ailleurs

$$(4-x^2)y'_n = -nxy_n + 2(n+1)y_{n-1},$$
$$(4-x^2)y'_{n-1} = -(n-1)xy_{n-1} + 2ny_{n-2}.$$
$$y_{n-2} = -y_{n-1} + xy_n,$$
$$y_{n-1} = y_n,$$

ce qui donne

$$\zeta_s(n) = \frac{j(2n+1)\xi}{2+x}y_n,$$

$$x = 2\cos\left[\frac{2(n-1)\pi}{2n+1}\right],$$

$$y_n = \frac{\sin\left[\frac{2(n^2-1)}{2n+1}\pi\right]}{\sin\left[\frac{2(n-1)}{2n+1}\pi\right]} = \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2(2n+1)}\right]}{\sin\left[\pi - \frac{3\pi}{2n+1}\right]},$$

$$y_n = (-1)^{n-1}\frac{\cos\left[\frac{3\pi}{2(2n+1)}\right]}{\sin\left[\frac{3\pi}{2n+1}\right]}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{2\sin\left[\frac{3\pi}{2(2n+1)}\right]} \# (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3\pi},$$

$$x = 2\cos\left[\pi - \frac{3\pi}{2n+1}\right]$$
$$= -2\cos\left[\frac{3\pi}{2n+1}\right] = -2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)^2\right],$$
$$x+2 = \left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)^2.$$

$$\zeta_s(n) = \frac{j\xi(2n+1)(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3\pi}}{\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)^2}$$
$$= \boxed{(-1)^{n-1}j\frac{(2n+1)^4}{(3\pi)^3}\xi}.$$

Pour $n = 10$ $\zeta_s(n) = -240j\xi$. Le calcul exact donne

$$\zeta'_s(n) = -168{,}2, \qquad \zeta_s(n) = -168{,}2j\xi.$$

On a donc bien l'ordre de grandeur.

On voit que si le facteur de surtension n'est pas nettement supérieur à 800, le zéro est pratiquement effacé. On a en effet

$$\frac{x_1}{x_2} = -lc\omega^2 + jrc\omega = -3{,}91 + jrc\omega$$
$$lc\omega^2 = +3{,}91.$$

D'où

$$\frac{x_1}{x_2} = -3{,}91 + j.3{,}91\frac{r}{l\omega}.$$

Donc

$$\xi = 3{,}91\frac{r}{l\omega}.$$

Cette condition n'est jamais réalisée.

CHAPITRE III.

Impédance caractéristique et intensités.

1. Impédance caractéristique. — Si l'on cherche la condition pour que l'impédance entre les bornes d'entrée $\frac{V_0}{I_0}$ soit égale à x_s, on trouve que

$$(x+\sigma-2)y_n - \sigma y_{n-1} = \sigma(x+\sigma-1)y_{n-1} - \sigma y_{n-2}$$
$$(x-2)y_n = \sigma^2 y_{n-1}$$

Tableau I.

y_1 x.	y_2 x^2-1.	y_3 x^3-2x.	y_4 x^4-3x^2+1.	y_5 x^5-4x^3+3x.	y_6 $x^6-5x^4+6x^2-1$.	y_7 $x^7-6x^5+10x^3-4x$.	y_8 $x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1$.	y_9 $x^9-8x^7+21x^5-20x^3+5x$.	y_{10} $x^{10}-9x^8+28x^6-35x^4+15x^2-1$.	α.
-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	11	$\frac{\pi}{2}$
-1,9	2,61	-3,059	3,2021	-3,02499	2,545381	-1,8112339	0,89596341	+0,108903421	-1,1028799099	
-1,8	2,24	-2,232	1,7776	-0,96768	0,035776	+1,0320768	-1,82198224	2,247455232	-2,2234571776	
-1,7	1,89	-1,513	0,6821	+0,35343	-1,282931	1,8275527	-1,82390859	+1,273091903	-0,3403476451	
-1,6	1,56	-0,896	-0,1264	+1,09824	-1,630784	1,5110144	-0,78683904	-0,252071936	+1,1901541376	
-1,5	1,25	-0,375	-0,6875	1,40625	-1,421875	0,7265625	0,33203125	-1,224609375	1,5048828125	
-1,4	0,96	+0,056	-1,0384	1,39776	-0,918464	-0,1119104	1,07513856	-1,393283584	0,8754584576	
-1,3	0,69	0,403	-1,2139	1,17507	-0,313691	-0,7672717	1,31114421	-0,937215773	-0,0927637051	
-1,2	0,44	0,672	-1,2464	0,82368	+0,257984	-1,1332608	1,10192896	-0,189053952	-0,8750642176	
-1,1	0,21	0,869	-1,1659	0,41349	0,711061	-1,1956571	0,60416181	+0,531079109	-1,1883488299	
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	+1	-1	$\frac{\pi}{3}$
-0,9	-0,19	1,071	-0,7739	-0,37449	1,110941	-0,6253569	-0,54811979	1,118664711	-0,4586784499	
-0,8	-0,36	1,088	-0,5104	-0,67968	1,054144	-0,1636352	-0,92323584	0,902223872	+0,2014567424	
-0,7	-0,51	1,057	-0,2299	-0,89607	0,857149	+0,2960657	-1,06439499	0,449010793	0,7500874349	
-0,6	-0,64	0,984	+0,0496	-1,01376	0,558656	0,6785664	-0,96579584	-0,099088896	1,0252491776	
-0,5	-0,75	0,875	0,3125	-1,03125	0,203125	0,9296875	-0,66796875	-0,595703125	0,9558203125	
-0,4	-0,84	0,736	0,5464	-0,95424	-0,167904	1,0198016	-0,23201664	-0,922194944	0,5848946176	
-0,3	-0,91	0,573	0,7381	-0,79443	-0,499771	0,9443613	+0,21646261	-1,009300083	0,0863274149	
-0,2	-0,96	0,392	0,8816	-0,56832	-0,767936	0,7219072	0,62355456	-0,846618112	-0,4542309376	
-0,1	-0,99	0,199	0,9701	-0,29601	-0,940499	0,3900599	0,90149301	-0,480209201	-0,8534720899	
0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	$\frac{\pi}{4}$

Racines.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0	±1	±1,41421	±1,61804	±1,73205	±1,80194	±1,84776	±1,87938	±1,90212	±1,91898
		0	±0,61804	±1	±1,24698	±1,41421	±1,53208	±1,61804	±1,68250
				0	±0,44504	±0,76536	±1	±1,17558	±1,30970
						0	±0,34730	±0,61804	±0,83080
								0	±0,28464

et

$$x_s = \sqrt{x_1 x_2 \frac{y_n}{y_{n-1}}} \qquad (a)$$

n, fini est le nombre de cellules. D'ailleurs

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\sin(n+1)\beta}{\sin n\beta},$$

$$\beta = \arccos\frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{x_1}{2x_2} + 1\right).$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ tend vers $e^{j\beta}$ (1 en module).

Pour n infini on peut donc écrire

$$x_s = \sqrt{x_1 x_2}\, e^{j\frac{\beta}{2}}.$$

Cette impédance est indépendante de la cellule considérée.

Nous retrouverons plus loin cette impédance caractéristique [4].

D'autre part (a) peut s'écrire

$$\sqrt{x_1 x_2\left(2\cos\beta + \frac{\sin(n-1)\beta}{\sin n\beta}\right)}$$

$$= \sqrt{x_1 x_2 x + x_1 x_2 \frac{\sin(n-1)\beta}{\sin n\beta}}.$$

Elle résulte donc de la superposition à l'impédance itérative $\sqrt{x_1 x_2 x}$ d'une partie périodique, fonction de n. Cette dernière s'annule d'ailleurs pour $n = 1$, cas de deux cellules consécutives.

2. **Intensités.** — Si l'on calcule les intensités successives, I_{n-1}, I_{n-2}, I_{n-3}, ..., I_{n-p}, on obtient

(4) $\frac{x_1}{x_2}$, quotient de deux imaginaires pures est négatif, mais $x_1 x_2$ est positif.

TABLEAU II.

$$\xi_s(n)\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = y_n(x) - y_{n-1}(x).$$

$\frac{x_1}{x_2}$.	$x = \frac{x_1}{x_2} + 2$.	ξ_s 1.	ξ_s 2.	ξ_s 3.	ξ_s 4.	ξ_s 5.	ξ_s 6.	ξ_s 7.	ξ_s 8.	ξ_s 9.	ξ_s 10.	Racines de ξ_s 10.
-4	-2	-3	5	-7	9	-11	13	-15	17	-19	21	-1,91114
-3,9	-1,9		4,51	-5,669	6,2611	-6,22709	5,570371	-4,3566149	2,70719731	-0,787059989	-1,2117833309	
-3,8	-1,8		4,04	-4,472	4,0096	-2,74528	0,931904	1,0678528	-2,85405904	4,069437472	-4,4709124096	
-3,7	-1,7		3,59	-3,403	2,1951	-0,32867	-1,636361	3,1104837	-3,65146129	3,097000493	-1,6134395481	
-3,6	-1,6		3,16	-2,456	0,7696	+1,22464	-2,729024	3,1417984	-2,29785344	0,534767104	1,4422260736	-1,65248
-3,5	-1,5		2,75	-1,625	-0,3125	2,09375	-2,828125	2,1484375	-0,39453125	-1,556640625	2,7294921875	
-3,4	-1,4		2,36	-0,904	-1,0944	2,43616	-2,316224	0,8065536	1,18704896	-2,468422144	2,2687420416	
-3,3	-1,3		1,99	-0,287	-1,6169	2,38897	-1,488761	-0,4535807	2,07841591	-2,248359983	0,8444520679	-1,24698
-3,2	-1,2		1,64	+0,232	-1,9184	2,07008	-0,565696	-1,3912448	2,23518976	-1,290982912	-0,6860102656	
-3,1	-1,1		1,31	0,659	-2,0349	1,57939	-0,297571	-1,9067181	1,79981891	-0,073082701	-1,7194279389	
-3	-1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	
-2,9	-0,9		0,71	1,261	-1,8449	0,39941	1,485431	-1,7362979	0,07723711	1,666784501	-1,5773431609	
-2,8	-0,8		0,44	1,448	-1,5984	-0,16928	1,733824	-1,2177792	-0,75960064	1,825459712	-0,7007671296	-0,73070
-2,7	-0,7		0,19	1,567	-1,2869	-0,66619	1,753219	-0,5610833	-1,36046069	1,513405783	0,3010766419	
-2,6	-0,6		-0,04	1,624	-0,9344	-1,06336	1,572416	0,1199104	-1,64436224	0,866706944	1,1243380736	
-2,5	-0,5		-0,25	1,625	-0,5625	-1,34375	1,234375	0,7265625	-1,59765625	0,072265625	1,5515234375	
-2,4	-0,4		-0,44	1,576	-0,1896	-1,50064	0,786336	1,1877056	-1,25181824	-0,690178304	1.5070895616	
-2,3	-0,3		-0,61	1,483	+0,1651	-1,53353	0,294659	1,4441323	-0,72789869	-1,225762693	1,0956274979	
-2,2	-0,2		-0,76	1,352	0,4896	-1,44992	-0,199616	1,4898432	-0,09835264	-1,470172672	0,3923871744	-0,14947
-2,1	-0,1		-0,89	1,189	0,7711	-1,26611	-0,644489	1,3305589	0,51143311	-1,381702211	-0,3732628889	
-2,0	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	
-1,9	0,1		-1,09	0,791	1,1691	-0,67409	-1,236509	0,5504391	1,29155291	-0,421283809	-1,3336812909	
-1,8	0,2		-1,16	0,568	1,2736	-0,31328	-1,336256	0,0460288	1,34546176	0,223063552	-1,3008490496	
-1,7	0,3		-1,21	0,337	1,3111	+0,05633	-1,294201	-0,4445903	1,16082391	0,792837473	-0,9229726681	
-1,6	0,4		-1,24	0,104	1,2824	0,40784	-1,122144	-0,8518976	0,78778496	1,154211584	-0,3373003264	
-1,5	0,5		-1,25	-0,125	1,1875	0,71875	-0,828125	-1,1328125	0,26171875	1,263671875	0,3601171875	0,44504
-1,4	0,6		-1,24	-0,344	1,0336	0,96416	-0,455104	-1,2372224	-0,28722944	1,064884736	0,9261602816	
-1,3	0,7		-1,21	-0,547	0,8271	1,19599	-0,038921	-1,1532147	-9,76832929	0,615384197	1,1990982279	
-1,2	0,8		-1,16	-0,728	0,5776	1,12008	0,374464	-0,8905088	-1,08687104	0,021011968	1,1036806144	
-1,1	0,9		-1,09	-0,881	0,2971	1,14839	0,736451	-0,4855841	-1,17347669	-0,570544921	0,6599862611	
-1,0	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1
-0,9	1,1		-0,89	-1,079	-0,2969	0,75251	1,124551	0,4845961	-0,59149529	-1,135240919	-0,6572697209	
-0,8	1,2		-0,76	-1,112	-0,5744	0,42272	1,081684	0,8752768	-0,03133184	-0,912875008	-1,0641181696	
-0,7	1,3		-0,61	-1,093	-0,8109	0,03883	0,861389	1,0809627	0,54387251	-0,373928437	-1,0299794781	
-0,6	1,4		-0,44	-1,016	-0,9824	-0,35936	0,479296	1,0303744	0,96322816	0,318145024	-0,5178251264	1,46610
-0,5	1,5		-0,25	-0,875	-1,0625	-0,71875	-0,015625	0,6953125	1,05859375	0,892578125	0,2802734375	
-0,4	1,6		-0,04	-0,664	-1,0224	-0,97184	-0,532544	0,1197696	0,72417536	1,038910976	0,9380822016	
-0,3	1,7		+0,19	-0,377	-0,8309	-1,03553	-0,929501	-0,5446217	0,00364411	0,550816687	0,9327442579	1,79956
-0,2	1,8		0,44	-0,008	-0,4544	-0,80992	-1,003456	-0,9963008	-0,78990544	-0,425472992	-0,0239980544	
-0,1	1,9		0,71	+0,449	-0,1431	-0,17711	-0,479609	-0,7341471	-0,91527049	-1,004866831	-0,9939764889	1,97766
0	2	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

facilement

$$
\begin{aligned}
I_{n-1} &= (x+\sigma-1)I_n \\
&= [x+(\sigma-1)]I_n, \\
I_{n-2} &= [(x+\sigma-1)x-1]I_n \\
&= [(x^2-1)+(\sigma-1)x]I_n, \\
I_{n-3} &= [x+\sigma-1)(x^2-2)+\sigma-1]I_n \\
&= [(x^3-2x)+(\sigma-1)(x^2-1)]I_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
I_{n-p} &= [(x+\sigma-1)(y_p-1)+(\sigma-1)y_{p-1}]I_n \\
&= [y_p+(\sigma-1)y_{p-1}]I_n.
\end{aligned}
$$

Si en particulier $x_s = x_2$, on a $\sigma = 1$. D'où

$$
\begin{aligned}
I_{n-1} &= xI_n, \\
I_{n-2} &= (x^2-1)I_n, \\
I_{n-3} &= (x^3-2x)I_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
I_{n-p} &= y_p I_n, \\
I_0 &= y_n I_n.
\end{aligned}
$$

Les intensités successives sont donc des fonctions très simples des polynomes y de Tchebichef.

Enfin, on a

$$I_n = \frac{V_0}{(x_1+x_s)y_n - x_s y_{n-1}}$$

et

$$I_p = \left[y_{n-p} + \left(\frac{x_s}{x_2} - 1\right)y_{n-p-1}\right]I_n.$$

d'où l'expression générale de I_p

$$\boxed{I_p = \frac{V_0\left[y_{n-p} + \left(\frac{x_s}{x_2} - 1\right)y_{n-p-1}\right]}{(x_1+x_s)y_n - x_s y_{n-1}}.}$$

Si l'on suppose la ligne ouverte à son extrémité ($x_s = \infty$), on obtient

$$I_p = \frac{V_0}{x_2}\,\frac{y_{n-p-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{V_0}{x_2}\,\frac{\sin(n-p)\beta}{[\sin(n+1)\beta - \sin n\beta]}$$

ou

$$I_p = \frac{V_0 \sin(n-p)\beta}{2x_2 \sin\frac{\beta}{2}\cos(2n+1)\frac{\beta}{2}} = \frac{V_0 \sin(n-p)\beta}{\sqrt{x_1 x_2}\sin(2n+1)\frac{\beta}{2}}.$$

Chaque cellule est parcourue par un courant de fréquence ω dont l'amplitude varie selon $\sin(n-p)\beta$ ([5]).

De plus le dénominateur s'annule pour $2n$ valeurs (différentes de 0 et π) qui entraînent, comme on l'a déjà vu dans l'étude de la résonance de sortie, n valeurs pour $\frac{x_1}{x_2}$ (fréquences propres).

([5]) Cette répartition stationnaire peut être rendue périodique pour des valeurs convenables de β [5].

3. **Cas de n infini.** — Si l'on suppose maintenant que n augmente indéfiniment (ou bien que les n cellules soient terminées par l'impédance caractéristique), une seule onde de propagation apparaît. En passant aux imaginaires, on obtient

$$I_p = \frac{V_0}{\sqrt{x_1 x_2}}\, e^{-j(2p+1)\frac{\beta}{2}}.$$

Pour $p = 0$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{x_1 x_2}}\, e^{-j\frac{\beta}{2}},$$

avec

$$\frac{V_0}{I_0} = \sqrt{x_1 x_2}\, e^{j\frac{\beta}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{I_p}{I_0} = e^{-jp\beta}.$$

Enfin le calcul des tensions successives V_{n-1}, V_{n-2}, ..., V_{n-p} donne

$$
\begin{aligned}
V_n &= x_2[I_{n-1} - I_n], \\
V_{n-1} &= x_2[I_{n-2} - I_{n-1}], \\
V_{n-p} &= x_2[I_{n-p-1} - I_{n-p}],
\end{aligned}
$$

qui conduit à

$$\frac{V_{n-p}}{V_{n-p-1}} = \frac{y_p - y_{p-1}}{y_{p+1} - y_p},$$

qui tend vers $e^{-j\beta}$ (1 en module) quand n augmente indéfiniment. D'une façon générale on aura comme pour les intensités

$$\frac{V_p}{I_p} = e^{-jp\beta}.$$

Donc

$$\frac{V_p}{I_p} = \sqrt{x_1 x_2}\, e^{j\frac{\beta}{2}}.$$

Quand x varie de $+2$ à -2, β varie de 0 à π et le déphasage $\alpha = \frac{\beta}{2}$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, linéairement.

(Pour $x = \pm 2$ les polynomes de Tchebichef ont des valeurs finies.)

On retrouve bien la formule générale établie plus haut

$$\frac{V_p}{I_p} = x_s = \sqrt{x_1 x_2}\, e^{j\frac{\beta}{2}}.$$

En valeurs instantanées nous pouvons écrire

$$
\left.
\begin{aligned}
i_p &= i_0\, e^{j(\omega t - \beta p)} = i_0 \sin(\omega t - p\beta) \\
v_p &= v_0\, e^{j(\omega t - \beta p)} = v_0 \sin(\omega t - p\beta)
\end{aligned}
\right\} \quad \text{avec} \quad \frac{v_0}{i_0} = \sqrt{x_1 x_2}\, e^{j\frac{\beta}{2}}.
$$

Les ondes progressives v et i sont décalées de $\frac{\beta}{2}$, et de cellule en cellule leur vitesse de propagation est $\frac{\omega}{\beta}$, donc fonction de ω par l'intermédiaire de β $\left[\beta = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{x_1}{2x_2} + 1\right)\right]$.

4. Cas des lignes à constantes uniformément réparties. — Nous allons prendre β très petit et poser $x_1 = jl\omega$, $x_2 = \frac{-j}{c\omega}$, impédances correspondant à l'unité de longueur de ligne. Dans ces conditions p représentera la longueur s comptée à partir de l'origine. On aura donc

$$i = i_0 \sin(\omega t - \beta s),$$
$$v = v_0 \sin(\omega t - \beta s).$$

Mais

$$\cos\beta = \frac{x_1}{2x_2} + 1. \qquad \text{D'où} \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{lc\omega^2}$$

β très petit entraîne $\beta = \omega\sqrt{lc}$ et le maximum de vitesse $\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$. Cette valeur est égale à la vitesse de la lumière dans le milieu entourant le fil si l'on considère des courants de haute fréquence se propageant sur des fils parallèles cylindriques. L'influence de la terre sur c est supposée négligeable (6).

On peut donc écrire

$$i = V_0\sqrt{\frac{c}{l}}\sin(\omega t - \beta s),$$
$$v = V_0 \sin(\omega t - \beta s).$$

Donc $\frac{v}{i} = \sqrt{\frac{l}{c}}$ avec une longueur d'onde sur le fil $\lambda = VT = \frac{2\pi}{\beta}$.

Sur la ligne d'impédance $\sqrt{\frac{l}{c}}$ les ondes progressives v et i conservent la même amplitude et la concordance de leur phase, mais celle-ci est proportionnelle à la distance à l'origine.

Ce sont là des résultats connus sur la propagation. Pour terminer, si la ligne a une longueur L et satisfait à la condition de résonance

$$\beta L = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad cl\omega^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \quad (7)$$

(il y a réflexion aux extrémités, L étant fini), les équations de i et v montrent qu'à tension d'entrée constante, l'intensité de sortie est aussi constante et décalée de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension génératrice.

On n'ignore pas ce moyen d'obtenir des tensions élevées à l'aide de lignes quart d'ondes sans pertes.

(6) Toute cause qui augmente l ou c, donc qui agit sur β, diminue la vitesse de propagation. Par exemple l'enveloppe des câbles souterrains augmente c sans modifier l. D'où une diminution de vitesse. Mêmes résultats pour les antennes Beverage.

(7) Ou $c'l'\omega^2 = \frac{\pi^2}{4}$, en appelant c' et l', la capacité et la self totales. C'est là condition de résonance pour les lignes à constantes uniformément réparties.

CHAPITRE IV.

Les polynomes de Tchebichef et les récurrences.

Les polynomes de Tchebichef obéissent à l'équation différentielle

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,y'\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\,y = 0.$$

Ils présentent une régularité pour $x^2 = 1$. On pose

$$\lambda = n^2, \quad T_n(x) = y_n(x) = \Sigma_s a_s x^s.$$

Leur récurrence

$$-\frac{n^2 - s^2}{(s+1)(s+2)}\,a_s$$

est vérifiée par

$$T_n(x) = \Sigma_\nu(-1)^\nu\binom{n-\nu}{\nu}\frac{n}{n-\nu}\frac{x^{n-2\nu}}{2^{2\nu}}$$
$$= \frac{1}{2^n}[2\cos(n \arccos x)],$$

$$\text{pour } n \geqq 1, \quad \text{où } 2\cos\left[n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

est donné par

$$U_n(x) = \sum_\nu (-1)^\nu\binom{n-\nu}{\nu}\frac{n}{n-\nu}x^{n-2\nu}.$$

Donc, en posant

$$U_n(x) = 2\cos\left[n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

on a

$$T_n(x) = \frac{U_n(2x)}{2^n}.$$

Les polynomes de Tchebichef apparaissent comme coefficients du développement de

$$\psi(x, t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n.$$

Deux d'entre eux sont liés par la récurrence

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1}(x) = 0 \qquad (1)$$

et chacun d'eux vérifie

$$(1-x^2)T''_n - xT'_n + n^2 T_n = 0.$$

Enfin (1) entraîne

$$U_{n+1}(x) - xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

et réciproquement.

De plus nous allons démontrer les relations

$$\frac{1-x^2}{n}T'_n+xT_n=\frac{1}{2}T_{n-1},$$

$$\frac{4-x^2}{n}U'_n+xU_n=2U_{n-1},$$

ou bien

$$T_{n+1}+\frac{1-x^2}{n}T'_n-\frac{1}{4}T_{n-1}=0,$$

$$U_{n+1}+\frac{4-x^2}{n}U'_n-U_{n-1}=0.$$

Formons d'abord les tableaux de cos (n arc cos x), puis $U_n(x)$ et U_n-y_n, en fonction de n :

n.	cos(n arc cos x).
0........	1
1........	x
2........	$2x^2-1$
3........	$4x^3-3x$
4........	$8x^4-8x^2+1$
5........	$16x^5-20x^3+5x$
6........	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
7........	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$
8........	$128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$
9........	$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$
10........	$512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4-50x^2+1$

n.	$2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right)=U_n(x)$.
0..........	2 pour $2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right)$ ou (1) pour $U_0(x)$
1..........	x
2..........	x^2-2
3..........	x^3-3x
4..........	x^4-4x^2+2
5..........	x^5-5x^3+5x
6..........	$x^6-6x^4+9x^2-2$
7..........	$x^7-7x^5+14x^3-7x$
8..........	$x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2$
9..........	$x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x$
10..........	$x^{10}-10x^8+35x^6+50x^4+25x^2-2$

n.	$2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right)-y_n=U_n-y_n$.	
0......	1 ou (0) pour U_n-y_n	
1......	0	
2......	-1	$=-y_0$
3......	$-x$	$=-y_1$
4......	$-(x^2-1)$	$=-y_2$
5......	$-(x^3-2x)$	$=-y_3$
6......	$-(x^4-3x^2+1)$	$=-y_4$
7......	$-(x^5-4x^3+3x)$	$=-y_5$
8......	$-(x^6-5x^4+6x^2-1)$	$=-y_6$
9......	$-(x^7-6x^5+10x^3-4x)$	$=-y_7$
10......	$-(x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1)$	$=-y_8$

$$U_n(x)=2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right)=y_n(x)-y_{n-2}(x)$$

$$=\sum_s(-1)^s\binom{n-s}{s}\frac{n}{n-s}x^{n-2s},$$

$U_n(x)$ a donc même récurrence que $y_n(x)$.

Considérons maintenant les deux relations

$$(1-x^2)T''_n-xT'_n+n^2T_n=0, \qquad (\alpha)$$

$$T_{n+1}-xT_n+\frac{1}{4}T_{n-1}=0. \qquad (\beta)$$

Par dérivation de (β)

$$\begin{array}{ll} +n^2 & T_{n+1}-xT_n+\frac{1}{4}T_{n-1}=0, \qquad (\beta)\\ -x & T'_{n+1}-xT'_n+\frac{1}{4}T'_{n-1}=T_n, \qquad (\beta')\\ (1-x^2) & T''_{n+1}-xT''_n+\frac{1}{4}T''_{n-1}=2T'_n. \qquad (\beta'')\end{array}$$

Formons $(1-x^2)\beta''-x\beta'+n^2\beta$

$$\left.\begin{array}{l}(1-x^2)T''_{n+1}-xT'_{n+1}+n^2T_{n+1}\\ -x[(1-x^2)T''_n-xT'_n+n^2T_n]\\ +\frac{1}{4}[(1-x^2)T''_{n-1}-xT'_{n-1}+n^2T_{n-1}]\end{array}\right\}=2(1-x^2)T'_n-xT_n.$$

D'où par (α) écrit pour n, $n-1$ et $n+1$,

$$[n^2-(n+1)^2]T_{n+1}+\frac{1}{4}[n^2-(n-1)^2]T_{n-1}$$
$$=2(1-x^2)T'_n-xT_n.$$

$$-(2n+1)T_{n+1}+\frac{2n-1}{4}T_{n-1}=2(1-x^2)T'_n-xT_n.$$

Enfin T_{n+1} par (β)

$$-(2n+1)\left[xT_n-\frac{1}{4}T_{n-1}\right]+\frac{1}{4}(2n-1)T_{n-1}$$
$$=2(1-x^2)T'_n-xT_n,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1-x^2}{n}T'_n+xT_n=\frac{1}{2}T_{n-1},}$$

ou bien

$$\boxed{\frac{1}{4}T_{n-1}=T_{n+1}+\frac{1-x^2}{n}T'_n.}$$

Le calcul est le même pour U_n :

$$(4-x^2)U''_n-xU'_n+n^2U_n=0, \qquad (\alpha)$$

$$\begin{array}{ll} n^2 & U_{n+1}-xU_n+U_{n-1}=0, \qquad (\beta)\\ -x & U'_{n+1}-xU'_n+U'_{n-1}=U_n, \qquad (\beta')\\ (4-x^2) & U''_{n+1}-xU''_n+U''_{n-1}=2U'_n. \qquad (\beta'')\end{array}$$

On obtient par la même marche

$$[n^2-(n+1)^2]U_{n+1}+[n^2-(n-1)^2]U_{n-1}$$
$$=2(4-x^2)U'_n-xU_n,$$

$$-(2n+1)U_{n+1}+(2n-1)U_{n-1}=2(4-x^2)U'_n-xU_n,$$

$$(2n+1)[U_{n-1}-xU_n]+(2n-1)U_{n-1}$$
$$=2(4-x^2)U'_n-xU_n,$$

qui donne finalement

$$\boxed{\frac{4-x^2}{n}U'_n + xU_n = 2U_{n-1},} \qquad (\gamma)$$

ou bien

$$U_{n-1} = U_{n+1} + \frac{4-x^2}{n}U'_n.$$

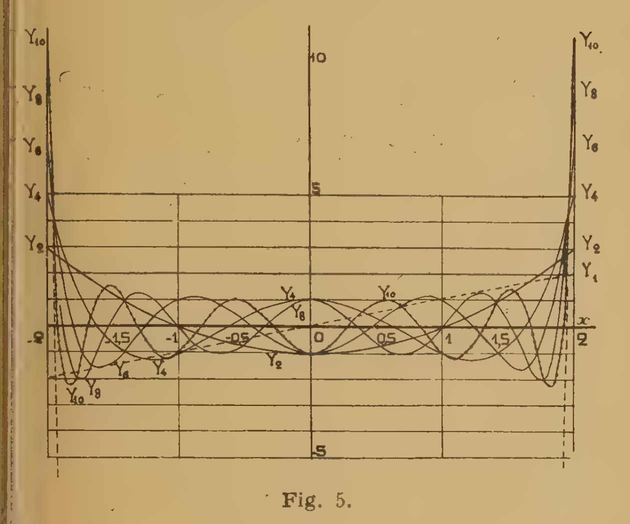


Fig. 5.

En partant de $U_n(x) = y_n(x) - y_{n-2}(x_1)$, (γ) donne après calculs

$$\boxed{(4-x^2)y'_n + nxy_n = 2(n+1)y_{n-1}.}$$

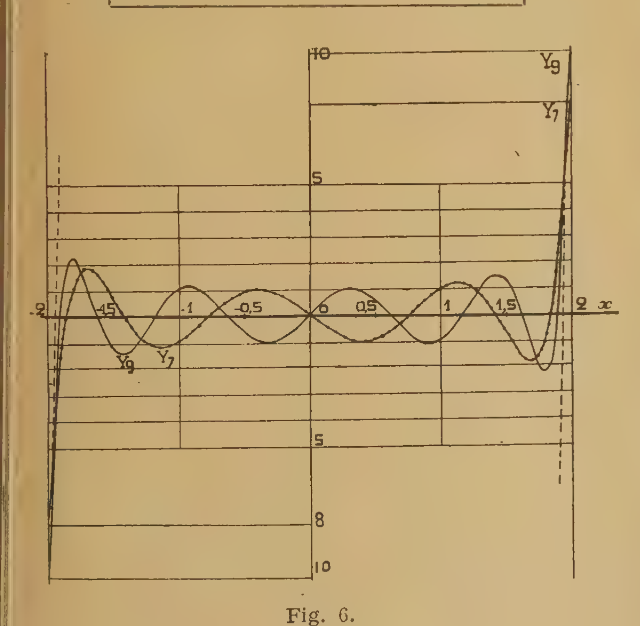


Fig. 6.

Les figures 5 et 6 donnent l'aspect des fonctions de Tchebichef tracées d'après le Tableau I pour n variant de 0 à 10.

CHAPITRE V.

Liaison avec les polynomes de Tchebichef.

Si l'on forme l'équation différentielle des polynomes

$$y_n(x) = \sum_s (-1)^s \binom{n-s}{s} x^{n-2s},$$

on aboutit aisément à

$$\boxed{(4-x^2)y''_n - 3xy'_n + n(n+2)y_n = 0,}$$

que l'on rend auto-adjointe par

$$z_n(x) = \sqrt{4-x^2}\,y_n(x).$$

On a alors

$$\left(\sqrt{4-x_2}\,z'_n\right)' + \frac{(n+1)^2}{\sqrt{4-x^2}}z_n = 0.$$

D'après le problème de Sturm-Liouville z_n est fini pour $x^2 = 4$ et il y a orthogonalité des polynomes z_n pour la répartition $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, c'est-à-dire que

$$\int_{-2}^{+2} \frac{z_n z_{n'}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 0 \qquad \text{pour } n \neq n';$$

l'intégrale de norme s'obtient aisément par la propriété (dégagée de la récurrence lors de la première étude)

$$y_n^2 = 1 + y_{n-1}y_{n+1}.$$

Donc

$$\int_{-2}^{+2} y_n^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-2}^{+2}\sqrt{4-x^2}\,dx + \underbrace{\int_{-2}^{+2} y_{n-1}y_{n+1}\sqrt{4-x^2}\,dx}_{\text{nul}},$$

$$\int_{-2}^{+2} y_n^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arc\sin\frac{x}{2}\right|_{-2}^{+2} = 2\pi.$$

La liaison avec les polynomes de Tchebichef peut s'effectuer :

1° Par les développements de

$$y_n(x),$$

$$U_n(x) = 2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right),$$

$$T_n(x) = \frac{U_n(2x)}{2^n}.$$

Il vient

$$y_n(x) - y_{n-2}(x) = U_n(x).$$

Donc de proche en proche, avec $U_0(x) = T_0(x) = 1$,

$$y_n(x) = U_n(x) + U_{n-2}(x) + U_{n-4}(x) + \dots \quad \text{terminé par} \begin{cases} U_1 & \text{si } n \text{ impair.} \\ U_0 & \text{si } n \text{ pair;} \end{cases} \qquad (I)$$

$$y_n(x) = 2^n T_n\left(\frac{x}{2}\right) + 2^{n-2} T_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right) + 2^{n-4} T_{n-4}\left(\frac{x}{2}\right) + \dots \quad \text{terminé par} \begin{cases} 2T_1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ T_0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \qquad (I')$$

2° Par les *récurrences*

$$y_{n-1}(x) - x\, y_n(x) + y_{n+1}(x) = 0, \qquad (II)$$

$$U_{n-1}(x) - x\, U_n(x) + U_{n+1}(x) = 0, \qquad (III)$$

$$\frac{1}{4} T_{n-1}(x) - x\, T_n(x) + T_{n+1}(x) = 0. \qquad (IV)$$

Si U vérifie (III), y, donné par (I), vérifie (II).

3° *Par l'équation différentielle.* — On a

$$\left(\sqrt{1-x^2}\, T_n'\right)' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} T_n = 0, \qquad (V)$$

$$\left(\sqrt{4-x^2}\, U_n'\right)' + \frac{n^2}{\sqrt{4-x^2}} U_n = 0. \qquad (VI)$$

Posons

$$Z_n(x) = z_n(2x) = 2\sqrt{1-x^2}\, y_n(2x).$$

$Z_n(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{dZ_n}{dx}\right) + \frac{(n+1)^2}{\sqrt{1-x^2}} Z_n = 0. \qquad (VII)$$

C'est l'équation différentielle de $T_{n+1}(x)$.

Il semblerait donc que l'on dût avoir

$$Z_n(x) = C_n T_{n+1}(x).$$

D'où

$$z_n(2x) = C_n T_{n+1}(x),$$

$$y_n(2x) = \frac{C_n}{2\sqrt{1-x^2}} T_{n+1}(x).$$

Mais si l'on entend par $T_{n+1}(x)$ le polynome de Tchebichef défini par « Courant et Hilbert » [1], c'est-à-dire

$$T_{n+1}(x) = \frac{\cos[(n+1)\arccos x]}{2^n},$$

le résultat est contraire à 1° et 2°. Il conduirait à $y_n(2) = \infty$ $\left(\text{puisque } T_{n+1}(1) = \frac{1}{2^n} \neq 0\right)$, c'est-à-dire, à une solution *non régulière.*

Réciproquement, la solution y_n régulière entraîne une solution Z_n de l'équation de Tchebichef qui est non seulement régulière dans tout l'intervalle, mais encore nulle à la frontière $x^2 = 1$.

Il faut donc entendre par $T_{n+1}(x)$ la solution nulle à la frontière. Or l'équation n de Tchebycheff a pour solutions

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(n \,\text{arc} \left|\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right| x\right).$$

Il faut donc prendre arc cos x si l'on veut attribuer à $T_n(1)$ et à $T_n(-1)$ la valeur zéro *quel que soit n.* (Avec le cosinus cela ne se produirait que périodiquement.)

La solution $T_n(1) = 0$ entraîne donc

$$y_n(2x) = \frac{C_n}{2\sqrt{1-x^2}} \sin[(n+1)\arccos x].$$

On vérifie que

$$\boxed{y_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.}$$

Mais nous montrons aussi, du même coup par (I) que

$$\frac{1}{2} y_n(2x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{2\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire

$$\cos(n \arccos x) + \cos[(n-2)\arccos x] + \cos[(n-4)\arccos x] + \dots$$

Relation évidente si l'on pose

$$x = \cos\varphi, \qquad \arccos x = \varphi.$$

Elle s'écrit

$$\frac{\sin[(n+1)\varphi]}{2\sin\varphi} = \cos[n\varphi] + \cos[(n-2)\varphi] + \cos[(n-4)\varphi] + \dots,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)\varphi] = {} & 2\sin\varphi\cos(n\varphi) \\ & + 2\sin\varphi\cos(n-2)\varphi \\ & + 2\sin\varphi\cos(n-4)\varphi \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + 2\sin\varphi\cos(n-2s)\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin[(n+1)\varphi] = {} & \sin(n+1)\varphi - \sin(n-1)\varphi \\ & + \sin(n-1)\varphi - \sin(n-3)\varphi \\ & + \sin(n-3)\varphi - \sin(n-5)\varphi \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \sin(n-2s+1)\varphi - \sin(n-2s-1)\varphi.\end{aligned}$$

Pour n impair la terminaison donne en effet

$$\begin{matrix} 2\sin\varphi\cos 5\varphi & & +\sin 6\varphi - \sin 4\varphi \\ +2\sin\varphi\cos 3\varphi & \to & +\sin 4\varphi - \sin 2\varphi \\ +2\sin\varphi\cos\varphi & & +\sin 2\varphi - \sin(0\varphi), \end{matrix}$$

et pour n pair

$$\begin{matrix} 2\sin\varphi\cos 4\varphi & & \sin 5\varphi - \sin 3\varphi \\ +2\sin\varphi\cos 2\varphi & \to & +\sin 3\varphi - \sin\varphi \\ +\sin\varphi\, 1 & & +\sin\varphi, \end{matrix}$$

car $U_0 = 1$ et non 2.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1946.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Courant et D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, I.
[2] Max Planck, *Electromagnétisme.*
[3] R. Mesny, *Radioélectricité générale.*
[4] Jahnke-Emde, *Funkionentafeln.*
[5] Mercier, *Les circuits oscillants.*
[6] Th. Stieltjes, *Œuvres complètes*, Groningen, 1918, II.
[7] P. Tchebichef, *Œuvres complètes*, Saint-Pétersbourg, 1907, I et II.
[8] J. Chokhate, *Sur le développement de l'intégrale* $\int_a^b \frac{p(y)}{x-y}$ *en fractions continues et sur les polynomes de Tchebichef* (*Rendiconti di Palermo*, 47) et *C. R. Acad. Sc.*, 1929, 189, p. 618-620; *ibid.*, 1923, p. 25-46.
[9] J. Shohat, *Proceedings International Mathematical Congress*, Toronto, 1928, I, p. 611-618; *American Math. Monthly*, 1926, 33, p. 354-361; *Transactions American Math. Society*, 1927, 29, p. 569-583; *Mémorial des Sciences Physiques*, n° 66 (*Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef*).
[10] Lord Kelvin, *On the mutual attraction or repulsion between two electrified sphercial conductors* (*Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, p. 86-97).
[11] A. Guillet et M. Aubert, *Propriétés électrostatiques des systèmes sphériques.* (*Mémorial des Sciences Physiques*, n° 38).
[12] M. Parodi, *Applications des polynomes électrosphériques* (*Mémorial des Sciences Physiques*, n° 47).

ÉTUDE THÉORIQUE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SUPRA-CONDUCTEURS

Par Georges PHILBERT.

Sommaire. — La théorie de London prévoit que les supra-conducteurs minces possèdent des propriétés spéciales. Parmi celles-ci sont examinées celles concernant le champ magnétique critique et l'importance relative de l'énergie de London pour des cylindres de diamètre très petit, soit placés dans des champs longitudinaux, soit parcourus par un courant. Une théorie de la division des supra-courants entre supra-conducteurs parallèles basée sur la conception de London est donnée; d'après elle, des effets spéciaux se produisent pour les supra-conducteurs minces. Des expériences sont indiquées, qui doivent permettre de les mettre en évidence.

La théorie macroscopique de F. London [1] est actuellement considérée comme donnant une représentation théorique satisfaisante des principales propriétés des supra-conducteurs. Rappelons que, d'après cette théorie, si **J** désigne la densité de courant, **H** et **B**, le champ et l'induction magnétiques, ρ la densité de charge électrique, les équations fondamentales du supra-conducteur sont :

(équation de London) $$c \operatorname{curl} \Lambda \mathbf{J} = -\mathbf{B}, \qquad (1)$$

(équations de Maxwell)
$$c \operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}, \qquad (2)$$
$$c \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \qquad (3)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \qquad (4)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \qquad (5)$$

Λ est la constante de London, de l'ordre de 10^{-32} sec^2.

Soient $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s$ et $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$, les valeurs de **H** et de **J** à la surface du supra-conducteur, et x la distance d'un point intérieur à la surface. Les équations (1 — 5) admettent, dans le cas stationnaire, des solutions évanouissantes de la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}}, \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}}. \qquad (6)$$

La quantité $c\sqrt{\Lambda}$ est la profondeur de pénétration du champ et du courant, de l'ordre de 10^{-6} cm à 10^{-5} cm.

Nous examinerons quelques conséquences de la théorie de F. London, en particulier celles qui sont liées à l'existence d'une pénétration limitée des grandeurs électromagnétiques à l'intérieur du supra-conducteur.

Transformation des phases dans le supra-conducteur. — Dans la théorie de London, c'est, non comme le suggère l'expérience, le champ magnétique, mais la valeur de la densité de courant, qui limite l'existence de la phase supra-conductrice. Si f_s et f_n désignent les énergies libres par unité de volume des phases supra-conductrice et normale, la densité de courant critique $J_s = J_c$ est donnée

sur la surface de séparation des deux phases par

$$f_s - f_n = -\frac{\Lambda}{2} J_c^2. \qquad (7)$$

La valeur correspondante du champ magnétique critique H_T dépend alors des dimensions du supra-conducteur. London [1, 2] a traité le cas d'un cylindre de rayon a placé dans un champ magnétique **H** parallèle à son axe. Les relations entre H_s et J_s sont respectivement, pour le supra-conducteur, de dimensions normales $(a \gg c\sqrt{\Lambda})$ et pour le supra-conducteur de dimensions microscopiques $(a \ll c\sqrt{\Lambda})$

$$H_s = -\sqrt{\Lambda} J_s \qquad (a \gg c\sqrt{\Lambda}),$$
$$H_s = -\frac{2c\sqrt{\Lambda}}{a} J_s \qquad (a \ll c\sqrt{\Lambda}).$$

Le rapport des champs critiques $H_c(a \ll c\sqrt{\Lambda})$ et $H_T(a \gg c\sqrt{\Lambda})$ est

$$\frac{H_c}{H_T} = \frac{2c\sqrt{\Lambda}}{a} \gg 1.$$

Le champ magnétique longitudinal peut donc atteindre, dans un cylindre mince, des valeurs beaucoup plus grandes que celles qu'il peut atteindre dans un cylindre ordinaire sans que la supra-conductibilité soit détruite.

Mais ce résultat n'est pas général. Il est intéressant de considérer un autre cas simple : celui d'un fil cylindrique parcouru par un supra-courant d'intensité I; **J** est alors un vecteur parallèle à l'axe, le champ **H** possède la symétrie de révolution autour de cet axe. Soient r le rayon vecteur dans un plan de section droite, a le rayon. L'intégration de (2) sur la surface S formée par la section droite donne :

$$2\pi a c H_s = \iint_S J_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}} d\sigma = 2\pi \int_0^a J_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}} r\, dr.$$

Compte tenu de ce que $r = a - x$,

$$2\pi a c H_s = -2\pi \int_0^a (a - x) J_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}} dx.$$

Supposons d'abord $a \gg c\sqrt{\Lambda}$:

$$2\pi a c H_s \simeq -2\pi a \int_0^\infty J_s e^{-\frac{x}{c\sqrt{\Lambda}}} = -2\pi a c \sqrt{\Lambda} J_s.$$

Et

$$H_s = -\sqrt{\Lambda} J_s. \qquad (I)$$

Si, au contraire, $a \ll c\sqrt{\Lambda}$, nous pouvons admettre que le supra-courant a une répartition uniforme :

$$\iint \mathbf{J}\, d\sigma \simeq \pi a^2 J_s$$

et

$$H_s = \frac{J_s}{2} \frac{a}{c}. \qquad (II)$$

Le rapport des valeurs critiques H_c et H_T du champ magnétique dans le supra-conducteur de dimensions « normales » et dans le supra-conducteur de dimensions « microscopiques » est donc

$$\frac{H_c}{H_T} = \frac{a}{2c\sqrt{\Lambda}} \ll 1.$$

Par conséquent, dans le cas d'un champ magnétique possédant la symétrie de révolution autour d'un cylindre, des champs beaucoup plus faibles que les champs critiques usuels doivent détruire la supra-conductibilité dans un supra-conducteur mince. Ce résultat est l'inverse de celui qui a été obtenu dans le cas du champ longitudinal.

Des expériences sur des fils de diamètre aussi faible que 10^{-6} cm ne peuvent être réalisés facilement. Mais, comme me l'a suggéré M. Bauer, on peut envisager des expériences sur des fils annulaires constitués par exemple d'une couche métallique déposée sur un fil de quartz; si la couche métallique a une épaisseur r_0 très supérieure à la pénétration $c\sqrt{\Lambda}$, les phénomènes sont les mêmes que pour un fil métallique homogène; si, au contraire, la couche a une épaisseur $r_0 \ll c\sqrt{\Lambda}$, l'intégration de r sur la surface donne

$$2\pi a c H_s \simeq 2\pi a r_0 J_s,$$

où a est le diamètre total, supposé tel que $a \gg r_0$.

La relation entre H_s et J_s est

$$H_s = \frac{J_s r_0}{c}.$$

Le rapport des valeurs critiques du champ magnétique est encore

$$\frac{H_c}{H_T} = \frac{r_0}{c\sqrt{\Lambda}} \ll 1.$$

Pratiquement, ce sont les intensités critiques des supra-courants qui sont mesurées. Si a_m et a_M sont les rayons des supra-conducteurs de dimensions « microscopiques » et de dimensions normales, ces intensités sont

$$I_c = 2\pi c H_T a_m,$$
$$I_T = 2\pi c H_T a_M.$$

Dans le cas d'un supra-conducteur « annulaire », on peut choisir a_m et a_M égaux; le rapport $\frac{I_c}{I_T}$ est alors

$$\frac{I_c}{I_T} = \frac{r_0}{c\sqrt{\Lambda}}.$$

C'est le même que celui des champs critiques. Des expériences réalisées sur de telles couches annulaires donneraient un nouveau moyen de calculer la constante Λ.

Contribution de l'énergie de London à l'énergie libre du supra-conducteur. — La question de l'existence d'une « énergie d'ordre » spéciale au supra-conducteur a fait l'objet de diverses discussions. Certains auteurs ont admis un résultat de von Laue [3], d'après lequel il n'y aurait pas d'énergie d'ordre spéciale au supra-conducteur. Ce résultat paraît résulter d'une confusion entre énergie libre localisée dans l'espace environnant le supra-conducteur et énergie de la phase supra-conductrice elle-même.

Ainsi, il résulte de certaines expériences de Justi, sur la division des supra-courants entre supra-conducteurs parallèles, que l'énergie localisée à l'intérieur de bobines placées en dérivation et dont les coefficients de self-induction et d'induction mutuelle sont L_{11}, L_{12}, L_{22} est la même que dans l'état normal, c'est-à-dire

$$\int \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\,d\tau = \mathcal{H} = \frac{1}{2}(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2).$$

Dans le supra-conducteur lui-même, l'énergie libre F est

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \Lambda\mathbf{J}^2),$$

soit, dans le cas stationnaire où $\mathbf{E} = 0$,

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 + \Lambda\mathbf{J}^2).$$

Le terme $\Lambda\mathbf{J}^2$ représente l'énergie de London, spéciale au supra-conducteur. Von Laue a donné une démonstration d'après laquelle l'énergie totale $\int_V \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau$ est très inférieure à l'énergie $\int_V \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\,d\tau$. C'est vrai seulement si l'intégration est étendue à un volume V englobant l'espace avoisinant le supra-conducteur. Dans un volume V' limité à la phase supra-conductrice, on voit facilement, puisque $H_s = -\sqrt{\Lambda}\,J_s$ à la surface et que les lois de décroissance de H et de J sont les mêmes, que

$$\int_{V'} \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 = \int_{V'} \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau. \tag{8}$$

Par exemple, dans le cas d'un cylindre placé dans un champ uniforme H et si le volume V' est le volume limité par une surface latérale limite, la valeur commune des deux intégrales est

$$\frac{1}{2}\Lambda J_s^2 c\sqrt{\Lambda} = \frac{1}{2}H_s^2 c\sqrt{\Lambda}. \tag{8'}$$

En comparant l'expression (8) à $\frac{1}{2}\mathbf{H}^2$, von Laue a, en fait, comparé (avec peu de rigueur d'ailleurs, car une nouvelle intégration étendue à tout l'espace où est emmagasinée l'énergie électromagnétique serait nécessaire) l'énergie libre contenue dans la phase supra-conductrice et l'énergie libre contenue dans l'espace avoisinant.

Le résultat (8) ne peut être maintenu dans le cas des supra-conducteurs minces. Ainsi, à la surface d'un cylindre de rayon $a \ll c\sqrt{\Lambda}$ placé dans un champ magnétique longitudinal H

$$H_s = -\frac{2c\sqrt{\Lambda}}{a}J_s$$

et

$$\int_{V'} \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\,d\tau = \frac{4c^2\Lambda}{a^2}\int_{V'} \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau \gg \int \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau.$$

Si le même cylindre est parcouru par un supra-courant parallèle à l'axe

$$H_s = -\frac{1}{2}\frac{aJ_s}{c}$$

et

$$\int_{V'} \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\,d\tau = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\Lambda c^2}\int_{V'} \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau \ll \int_{V'} \frac{1}{2}\Lambda\mathbf{J}^2\,d\tau.$$

Par conséquent, suivant la symétrie du champ magnétique, l'énergie de London peut être, dans un supra-conducteur mince, très inférieure ou très supérieure à l'énergie magnétique. Ce fait, rattaché directement aux valeurs que prend, dans les différents cas, le champ magnétique critique, a probablement des répercussions au point de vue thermodynamique.

Division des supra-courants entre supra-conducteurs parallèles. — Von Laue [3] a déduit des équations classiques de l'électrodynamique les lois de division des supra-courants entre supra-conducteurs parallèles. Bornons-nous au cas de deux supra-conducteurs placés en dérivation. Soient I_1 et I_2 les deux supra-courants, L_{11}, L_{22} les coefficients de self-induction, L_{12} le coefficient d'induction mutuelle, v_1 et v_2 les différences de potentiel entre les deux extrémités de la dérivation, r_1 et r_2 les résistances.

Les équations classiques de l'électrodynamique

$$L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} = v_1 - r_1I_1$$

donnent, par intégration, en tenant compte de $v_1 = v_2 = v$ et de $r_1 = r_2 = 0$ et, en prenant, à l'instant $t = 0$, $I_1^0 = I_2^0 = I^0 = 0$ (cette condition revient à dire que, lors du passage par le point de transition, aucun courant ne traverse le circuit) :

$$I_1 = \frac{L_{22} - L_{12}}{L_{11} + L_{22} - 2L_{12}}I, \qquad I_2 = \frac{L_{11} - L_{12}}{L_{11} + L_{22} - 2L_{12}}I,$$

I étant le supra-courant principal ($I = I_1 + I_2$). Cette démonstration prête à deux critiques :

1° Elle considère, comme valable, la notion de résistance dans le supra-conducteur.

2° Les résultats, nous le verrons, ne sont pas généraux. Ils s'appliquent seulement à des supra-conducteurs possédant une self-inductance notable (conducteur en forme de bobines).

La relation caractéristique du conducteur ordinaire est $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Sa transposition, sous forme intégrale, fournit la loi de Kirchhoff. De même, c'est de la relation de London qu'il convient de déduire les lois de division des supra-courants. Dans les cas usuels, d'ailleurs, ces lois se ramènent à la conservation du flux magnétique.

La relation (1) de London est plus facilement utilisable sous la forme

$$c\Lambda\mathbf{J} = \mathbf{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\nu, \qquad (1')$$

où ν est une fonction multiforme des coordonnées, telle que, pour un anneau

$$\oint_C \text{grad}\,\nu)_s\,ds = \iint \nu\,d\sigma = F,$$

où F est le flux magnétique initial dans l'anneau (défini par le passage état normal → état supra-conducteur).

Intégrons (1′) sur le parcours $C_1 + C_2$ constitué par l'ensembe ABA des deux dérivations (parcourues par C_1 dans le sens du courant I_1, pour C_2 dans le sens contraire).

$$\int_{C_1} c\Lambda_1 J_{1s}\,ds - \int_{C_2} c\Lambda_2 J_{2s}\,ds = -\oint_C A_s\,ds + F. \qquad (9)$$

Introduisons les courants I_1 et I_2. Nous choisissons comme parcours C un parcours situé sur la surface des supra-conducteurs. Supposons d'abord que ceux-ci aient la forme d'un fil cylindrique de diamètre a très supérieur à la profondeur de pénétration $c\sqrt{\Lambda}$. Un raisonnement déjà donné montre que

$$I = 2\pi a J_s c\sqrt{\Lambda} \quad (^1).$$

Plus généralement, pour un supra-conducteur de forme quelconque, I sera de la forme

$$I \sim c\sqrt{\Lambda}J_s$$

(9) donne donc

$$\oint_{C_1} \frac{I_1\sqrt{\Lambda_1}}{2\pi a_1}\,ds - \int_{C_2} \frac{I_2\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2}\,ds = \oint_C A_s\,ds + F. \qquad (10)$$

(1) Dans le cas actuel, ce raisonnement n'est pas rigoureux : les potentiels **A** sont différents sur les surfaces « externes » et « internes » (dirigées ou non vers l'autre branche de la dérivation); les courants **J** sont également différents. Si le rayon des fils est faible devant la distance, l'approximation utilisée est suffisante.

En supposant que les conducteurs aient un diamètre uniforme et que leurs longueurs soient l_1 et l_2,

$$l_1 I_1 \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{2\pi a_1} - l_2 I_2 \frac{\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2} = \oint_C A_s\,ds + F.$$

Il reste à calculer $\oint A_s\,ds$; deux cas se présentent :

1° Chacun des deux supra-conducteurs possède une self-induction notable, telle que le flux magnétique embrassé par chacun d'eux est très supérieur au flux embrassé par l'espace qui les sépare. En ce cas,

$$\oint_C A_s\,ds = \frac{L_{11}I_1}{c} + \frac{L_{12}I_2}{c} - \frac{L_{22}I_2}{c} - \frac{L_{21}I_1}{c},$$

d'où

$$I_1\left(\frac{l_1 c\sqrt{\Lambda_1}}{2\pi a_1} - L_{11} + L_{12}\right) = I_2\left(\frac{l_2 c\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2} - L_{22} + L_{21}\right).$$

Compte tenu de

$$c\sqrt{\Lambda_1} \gg a_1, \qquad c\sqrt{\Lambda_2} \gg a_2,$$

nous obtenons

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_{22} - L_{12}}{L_{21} + L_{22}}. \qquad (11)$$

Cette relation a été vérifiée par Justi [4].

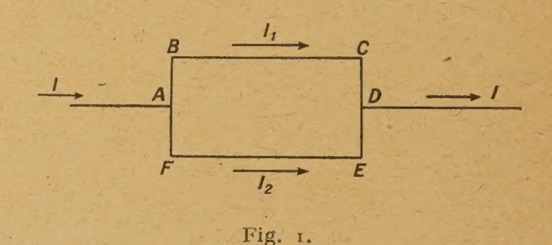


Fig. 1.

2° Les supra-conducteurs n'ont pas de self-inductance notable. C'est le cas, par exemple, d'un circuit rectangulaire. La méthode de Laue ne permet pas de le traiter correctement.

Le champ $\mathbf{H}(M)$, créé par le courant $\mathbf{J}\,d\tau$ en un point M de l'espace, est

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{d\tau}{r^2}\left[\mathbf{J}\frac{\mathbf{r}}{r}\right]$$

($\mathbf{r}$ est le rayon vecteur, liant M à l'élément $d\tau$), ou

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{I}{r^2}\left[d\mathbf{r}\frac{\mathbf{r}}{r}\right].$$

Dans le cas de la figure, le champ **H** est en tous les points perpendiculaire à un plan et sa valeur

solue a pour forme

$$H = AI_1 - BI_2.$$

Une intégration sur la surface totale donne

$$\iint H_n \, d\sigma = \iint B_n \, d\sigma = \oint_C \Lambda_s \, ds = \frac{M_1}{c} I_1 - \frac{M_2}{c} I_2.$$

s coefficients M_1 et M_2 ont des dimensions analogues elles de l_1 et l_2. Si BC, EF $\gg$ AB, AF, on montre e l'ordre de grandeur de M_1 et M_2 est

$$l l_n \frac{a}{R} \qquad (BF = R,\ BC = EF = l),$$

étant le rayon des fils.

En opérant comme plus haut, et en désignant, r L_1 et L_2, a_1 et a_2, les longueurs et les rayons des ux fils de dérivation, nous obtenons

$$l_1 \frac{I_1 \sqrt{\Lambda_1}}{2\pi a_1} - l_2 \frac{I_2 \sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2} = \frac{M_1}{c} I_1 + \frac{M_2}{c} I_2.$$

Admettons que $M_1 \gg \frac{c\sqrt{\Lambda_1}}{2\pi a_1} l_1$, $M_2 \gg \frac{c\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2} l_2$ ypothèse (II)] et $F = 0$ [hypothèse (I)], nous tenons

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M_1}{M_2}. \qquad (12)$$

2) a exactement la même forme que la loi d'Ohm-rchhoff.

Si l'hypothèse (I) n'est pas satisfaite, les équa-ons sont modifiées; des termes faisant intervenir F paraissent. En particulier, si le flux initial F est uniquement aux courants ordinaires I_1^0 et I_2^0, équations (11) (12) deviennent respectivement

$$\frac{I_1 - I_1^0}{I_2 - I_2^0} = \frac{L_{22} - L_{12}}{L_{11} - L_{12}}$$

$$\frac{I_2 - I_2^0}{I_1 - I_1^0} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Tous les raisonnements faits jusqu'ici reviennent, isque nous avons considéré les quantités $\frac{l_2\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi a_2}$ mme négligeables, à utiliser la loi du « flux magné-que constant ». Mais si l'hypothèse (II) n'est pas alisée, les résultats deviennent différents.

Cherchons une limite supérieure du coefficient M, pour cela, considérons, de nouveau, le cir-it ABCDEF; soit le champ H, créé en un point M r la branche BC du circuit. Supposons

$$AB = EF = l \ll BF = CE = R.$$

it B l'origine des coordonnées (x, y). En M (x, y), le champ dû à BC est tel que

$$H(x, y) < \frac{2I}{y},$$

et le flux magnétique dû à BC est

$$\iint H_n(x, y) \, d\sigma < \iint \frac{2I}{cy} \, dx \, dy = \frac{2lI}{c} l_n \frac{R}{a}.$$

Par suite, $M < 2 l l_n \frac{R}{a}$.

Les termes M et $\frac{lc\sqrt{\Lambda}}{2\pi a}$ sont du même ordre de grandeur, si

$$\frac{a}{c\sqrt{\Lambda}} \sim \frac{1}{2\pi l_n \frac{R}{a}}. \qquad (13)$$

L'ordre de grandeur de $\frac{1}{2\pi l_n \frac{R}{a}}$ variant logarithmi-quement avec le rapport $\frac{R}{a}$, on peut, pour a petit, le considérer comme compris entre 10^{-1} et 10^{-2} (pour des distances R correspondant à des conditions expérimentales normales). On sait que $c\sqrt{\Lambda}$ est au maximum de l'ordre de 10^{-5} cm (pour des tempé-ratures voisines de la température-seuil). La condi-tion (13) n'est donc réalisée que pour des valeurs $a \ll c\sqrt{\Lambda}$, telles que $a = 10^{-1} c\sqrt{\Lambda}$ à $10^{-2} c\sqrt{\Lambda}$. Dès que $a \sim c\sqrt{\Lambda}$, l'hypothèse (II) est vérifiée.

Mais, si $a \ll c\sqrt{\Lambda}$, la relation

$$I = 2\pi a J_1 c \sqrt{\Lambda}$$

est remplacée par la relation

$$J_s = \frac{I}{\pi a^2}.$$

Par suite, la loi de division des supra-courants prend la forme

$$\oint_C c\Lambda J_1 \, ds - \oint_C A_s \, ds$$
$$= \frac{I_1}{\pi a_1^2} c^2 \Lambda_1 - \frac{I_2}{\pi a_2^2} c^2 \Lambda_2 - M_1 I_1 - M_2 I_2 = F.$$

Dans l'hypothèse (I) $(F = 0)$,

$$I_1 \left(\frac{c^2 \Lambda_1}{\pi a_1^2} - M_1 \right) = I_2 \left(\frac{c^2 \Lambda_2}{\pi a_2^2} - M_2 \right)$$

et

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{c^2 \frac{\Lambda_2}{\pi a_2^2} - M_2}{c^2 \frac{\Lambda_1}{\pi a_1^2} - M_1}. \qquad (14)$$

La loi (14) se simplifie si M_1 et M_2 sont tels que

$$M_1 \ll \frac{c^2 \Lambda_1}{\pi a_1^2}, \qquad M_2 \ll \frac{c^2 \Lambda_2}{\pi a_2^2}.$$

En ce cas,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{l_2}{l_1} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{a_1}{a_2}\right). \tag{14'}$$

En comparant, avec la loi de Kirchhoff, nous constatons que, si les deux dérivations sont formées du même métal (ce qui correspond à des résistivités égales et à $\Lambda_1 = \Lambda_2$), la loi de Kirchhoff et la loi (14′) sont les mêmes.

Aucune expérience ne peut manifestement être réalisée avec des fils de 10^{-6} cm de rayon. Mais il est possible d'utiliser des fils de quartz d'un rayon a voisin de 5.10^{-5} cm. Si on les recouvre d'une couche métallique d'épaisseur r très faible, on obtient un conducteur annulaire. Pour de tels conducteurs la loi de répartition prend la forme (tout à fait analogue à la précédente)

$$\oint_C \Lambda J_s \, ds - \oint_C A_s \, ds = \frac{I_1}{2\pi a_1 r_1} c^2 \Lambda_1 - \frac{I_2}{2\pi a_2 r_2} c^2 \Lambda_2 - M_1 I_1 - M_2 I_2 = F.$$

Les termes $\frac{c^2 \Lambda_1}{2\pi a_1 r}$ avec $r = 10^{-7}$ cm et $a = 5.10^{-5}$ cm ont le même ordre de grandeur que M_1 et M_2. Un tel dispositif permettrait donc de mettre en évidence expérimentalement, l'influence de l'épaisseur du supra-conducteur sur les lois de dérivation

Remarque sur la conservationdu flux magnétique dans un supra-conducteur multiplement connexe. — Si l'on considère dans un anneau une courbe (non réductible à un point), on a la relation

$$\oint_C \Lambda J_s \, ds + \oint A_s \, ds = \text{const.}$$

D'après le théorème de Stokes, cette intégrale ne dépend pas de la position de C dans l'anneau. Il suffit donc de prendre C suffisamment loin de la surface pour obtenir

$$\oint_C A_s \, ds = \text{const.}$$

C'est la démonstration que donne London [1, 5] de la conservation du flux magnétique. Cette démonstration ne paraît pas très générale. Elle fait intervenir une grandeur que l'expérience ne permet pas d'atteindre : le flux du champ magnétique à travers une surface limitée par une courbe comprise à l'intérieur de la région supra-conductrice. Il semble plus naturel de prendre C sur la surface de l'anneau et de garder l'équation complète

$$\oint c \Lambda J_s \, ds + \oint A_s \, ds = F.$$

En général, le terme $\oint \mathbf{A}_s \, ds$ est largement prépondérant. Mais, pour des anneaux de très petites dimensions, seule la loi complète est satisfaisante. Le problème qui se pose n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du problème plus général que nous venons de traiter. Ici encore, il est possible de réaliser des supra-conducteurs très minces pour lesquels la loi habituelle de conservation du flux magnétique n'est pas valable.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à MM. les Professeurs London (Durham, U. S. A.) et Bauer (Paris) qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail. Je remercie aussi très amicalement Mlle L. Couture pour l'aide qu'elle m'a apportée et les discussions que nous avons eues ensemble.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1946.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. London, Une conception nouvelle de la supra-conductibilité. *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, éditeur; Paris.
[2] Von Laue, *Phys. Z.*, 1942, **43**, p. 274.
[3] Von Laue, *Phys. Z.*, 1932, **33**, p. 793.
[4] Justi et Zickner, *Phys. Z.*, 1941, **42**, p. 257.
[5] F. et H. London, *Proc. Roy. Soc.*, A, 1935, **149**, p. 71. — F. London, *Proc. Roy. Soc.*, A, 1935, **152**, p. 24.

Le Gérant : Maurice Blondin. 124510 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1946.